

PŘEDMLUVA PŘEKLADATELE

K obecnému významu vlastní autorovy předmluvy je těžké co dodat. Rád bych však z tohoto úvodního slova zdůraznil tu část, ve které J. W. Leech poznamenává, že v současné literatuře chybí takovýto poměrně jednoduchý a přitom obsáhlý úvod do analytické mechaniky, který čtenáři poskytuje široký obecný přehled, aniž by ho zatěžoval podrobnostmi. Je skutečně mnoho vynikajících učebnic teoretické mechaniky, jmenujme jen v naší literatuře výbornou knihu Trkalovu a Brdičkovu, které jsou však velmi podrobné, a tudíž rozsáhlé. Stane se, že čtenář je mnohdy touto rozsáhlostí odrazen a překonává pak těžkosti při dalším studiu buď jiných partií teoretické fyziky nebo při studiu různých technických disciplín s jistou nepřesností ve znalostech základů mechaniky. Tomu má tato knížka, nyní už nikoliv ojedinělá, ale podle mého soudu určeným potřebám stále nejlépe vyhovující, odpomoci. Přál bych si, aby ti ze čtenářů, kterým tyto předložené základy budou postačovat k dalšímu studiu, např. ryze technických disciplín, vždy v budoucnu pro osvěžení paměti po tomto spise sáhli a aby ti ze čtenářů, kteří budou ve studiu této disciplíny pokračovat, měli práci se zmíněnými podrobnými učebnicemi usnadněnu. Praha, červen 1968

J. Kracík

PŘEDMLUVA

V historii výuky klasické mechaniky se objevuje jedna zvláštnost. Při studiu atomové fyziky byla klasická mechanika částečně zanedbávána, takže to vedlo ke vzniku nesprávné představy, že se fyzik může naučit základům kvantové a statistické fyziky, aniž by znal klasické základy, na kterých jsou tyto disciplíny vybudovány. V poslední době se situace zlepšuje prodloužením výuky, kdy se analytické metody mechaniky přednášejí k dovršení studia. Tomuto předmětu je věnována řada výborných knih a jeho elementární výklad v mnoha základních učebnicích. Do současné doby však nebylo možné najít úvodní knihu do klasické mechaniky, která by začátečníkovi poskytla široký obecný přehled a přitom by čtenáře nezatěžovala podrobnostmi. Lze očekávat, že předložený spis tento nedostatek odstraní a že experimentálním fyzikům poskytne dostatečné základy pro porozumění teorii a u teoretiků vyvolá zájem o podrobnější studium analytických metod mechaniky.

Ke čtení tohoto spisu nemusí být potřebné znalosti z matematiky hlubší než ke studiu základních kursů fyziky. Pro porozumění kapitolám IX-XI je nevyhnutelná znalost základů kartézských tenzorů. Předpokládá se, že čtenář zná Newtonovu mechaniku a základy speciální teorie relativity, které jsou ve výkladu zahrnuty. Rovněž je zde naznačen přechod ke kvantové mechanice, jinak by se totiž některé uvedené vývody jevily jako samoúčelné. Naproti tomu statistická mechanika není probírána, jelikož její základy nejsou bezprostředně spojeny s tématem knihy. Dále jsou zde zahrnuty velmi potřebné vztahy o použití analytických metod v mechanice kontinua a speciálně v teorii pole. Teorie pole je velmi důležitou částí soudobé fyziky, avšak systematický výklad jejích základů není vždy dostupný.

Moje nejvřelejší díky jsou určeny Dr. R. O. Daviesovi, Dr. A. J. Manuelovi a panu K. A. Woolnerovi za jejich kritické připomínky a za pomoc, kterou poskytli při sepisování rukopisu.

Queen Mary College
březen 1958

J. W. L.

i. ÚVOD

Klasická mechanika studuje nejprve pohyb objektů, kterým se říká *hmotné body*. Celkový popis hmotného bodu v libovolný časový okamžik se získá pomocí tří prostorových souřadnic a udáním skalární konstanty nazvané hmotností bodu. Pojem materiálního bodu nelze ztotožnit s libovolnou hmotnou částicí, avšak pohyb těles makroskopických rozměrů lze často přesně popsat jako pohyb souborů hmotných bodů v udaném smyslu.

Hmotné body se pohybují v souladu s Newtonovými zákony, které lze vyslovit takto:

1. Každé těleso zachovává stav klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud na ně nepůsobí nějaká vnější síla.
2. Časová změna hybnosti tělesa je úměrná velikosti vnější síly působící na těleso a děje se ve směru působení této síly.
3. Síly, kterými dvě tělesa na sebe působí, jsou stejné, ale opačného směru.

Uvedené zákony potřebují určitá doplnění. Konečné schéma lze lehko kritizovat jako logicky nedostatečné, neboť tyto zákony ve své formulaci obsahují takové termíny jako je hmotnost, hybnost, síla, směr působení atd., které nebyly dostatečně uspokojivě a nezávisle definovány. Bridgman, následuje Macha, předložil pokusné určení hmotnosti a síly, které by tyto těžkosti částečně odstranilo, avšak úloha určení směrnice působící síly tím řešena není. Tento problém nelze na tomto místě dále řešit.*) Budeme zatím předpokládat, že tyto termíny jsou intuitivně jasné a že Newtonovy zákony jsou logickými formulacemi jejich vzájemných vztahů.

Náš cíl bude spočívat v důkaze, že Newtonovy zákony lze nahradit jediným postulátem (variačním principem), který bude z více důvodů výhodnější. V mechanice hmotného bodu je tento postulát ekvivalentní Newtonovým zákonům. Jeho cena spočívá v lehkosti, s jakou ho může být použito pro formulaci složitých úloh.

Soustavu založenou na Newtonových zákonech lze nazvat *vektorovou mechanikou*. Používá se zde totiž takových veličin jako je síla, rychlost atd., které jsou podle svého charakteru veličinami vektorovými. Druhá možná soustava, zavedená Leibnitzem a spojená se jmény Eulera, Lagrangea a Hamiltona, může být nazvána *analytickou mechanikou*. Základní veličiny jsou nyní skaláry, nikoliv vektory, a dynamické vztahy se obdrží prostřednictvím systematického diferencování.

Použití této analytické metody k jednodušším případům lze srovnat s pronájmem letadla k přechodu ulice. V takových případech je třeba si uvědomit, že je snahou podrobně se seznámit s novou metodou. Jak se této analytické metody používá, vyplývá z formulace velmi složitých úloh. Další přednost této metody je možnost jejího rozšíření na takové

*) Pro další studium tohoto problému možno použít díla Machova, Bridgmanova a Lindsayova a Margenauova, citovaná na konci knihy.

oblasti, jako je klasická teorie pole a kvantová mechanika, v kterých již nejsou Newtonovy zákony použitelné.

Z estetického hlediska bylo by lepší z počátku postulovat zákony mechaniky v jejich obecné (analytické) podobě a potom dokázat, jak při některých omezujících podmínkách přecházejí na Newtonovy zákony. Tento způsob je dobrý, je-li čtenář s obecnými principy obeznámen, nelze jej však použít, jsou-li známy jen Newtonovy zákony.

Je třeba zdůraznit, že použije-li se obou metod — vektorové a analytické —, tu rozdíl mezi nimi je ve *formulaci* pohybových rovnic. Obyčejně je to soustava diferenciálních rovnic a v každém případě konečné stadium řešení vyžaduje zručnost v manipulaci s takovými rovnicemi. S ohledem na tyto závěry budou příklady zde probírané rozpracovány obyčejně až k pohybovým rovnicím.

Takovéto předznamenání je nevyhnutelné, aby bylo možné vyvarovat se kritiky, která je často proti studiu vektorové analýzy namířena. Velmi často vzniká chybný dojem, že pomocí vektorové metody lze řešit všechny otázky až do podrobností; následující rozčarování může vést k představě, že hodnota této metody je zveličena. Pravda je ovšem v tom, že užití vektorů vede ke značnému zkrácení duševního úsilí při převodu fyzikálních podmínek úlohy na matematický zápis. Ve všech případech — s výjimkou nemnoha případů elementárních — je nevyhnutelné v některé etapě rozložit vektory na jejich složky; podstata práce pak spočívá v tom, aby se co nejlepším způsobem vybrala soustava souřadnic. Podobná situace je i v analytické mechanice.

ii. ZÁKLADNÍ PŘEDSTAVY

V této kapitole budou krátce vyloženy ty základy mechaniky, které bezprostředně plynou z Newtonových zákonů a které budou obzvláště důležité při dalším výkladu Lagrangeovy a Hamiltonovy metody.

Podle Newtonových zákonů je pohyb *systému* N hmotných bodů popsán řešením N vektorových pohybových rovnic tvaru

$$\mathbf{F}_s = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_s = \frac{d}{dt} (m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \quad (s = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (2.1)$$

Tyto rovnice mohou být ale jinak zapsány jako soustava $3N$ skalárních rovnic

$$F_i = \frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 3N), \quad (2.1')$$

kde $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, přičemž poloha každého hmotného bodu je udána třemi kartézskými souřadnicemi x_i . Označení je zde zvoleno tak, že tři souřadnice každého bodu mají tři indexy jdoucí po sobě. První hmotný bod má souřadnice x_1 , x_2 a x_3 a jeho hmotnost je $m_1 = m_2 = m_3$. Z počátku bude uvažována jen kartézská soustava souřadnic.

Pro určení pohybu systému je nutné udat složky síly a *počáteční* nebo *okrajové podmínky*. V obecném případě mohou být síly libovolně závislé na čase, na souřadnicích a jejich derivacích libovolného řádu. Ale experimentální pozorování ukazují, že v tom případě, kdy síly lze popsat analyticky, závisí především jen na souřadnicích a rychlostech bodů. Potom jsou pohybové rovnice diferenciálními rovnicemi druhého řádu a pro jejich řešení je nutné znát dvě počáteční podmínky pro každou proměnnou x_i . Tyto podmínky se obvykle zadávají jako hodnoty x_i a $\dot{x}_i$ v některém čase; mohou být tedy specifikovány libovolným způsobem. Mnohem vzácněji jsou udávány jinou formou, kdy hodnota x_i je určena ve dvou časových okamžicích t_1 a t_2 ; v tomto případě libovolné zadání počátečních podmínek může být v rozporu se zadanými složkami síly. Ve všech případech je pak nevyhnutelná znalost celkem $6N$ konstant.

ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Často bývá vhodné si uvědomit, že na sílu, která působí na každý hmotný bod systému, lze pohlížet jako na součet dvou složek

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^{(i)} + \mathbf{F}_s^{(e)}, \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{F}_s^{(i)}$ je složka celkové síly, vyvolaná působením ostatních hmotných bodů systému, $\mathbf{F}_s^{(e)}$ je pak složka celkové síly, mající původ vně systému. Smysl tohoto rozdělení je v tom, že při

zkoumání systému jako celku a při použití třetího Newtonova zákona lze dokázat, že vždy dvě dvojice vnitřních sil se ruší, tj.

$$\mathbf{F} = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s^{(e)}. \quad (2.3)$$

Sečteme-li rovnice (2.1) a použijeme-li rovnosti (2.3), dostaneme první rovnici

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s^{(e)} = \sum_s \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_s) = \frac{d}{dt} \left[\sum_s \mathbf{p}_s \right] = \frac{d}{dt} \mathbf{P}, \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{P}$ je celková hybnost systému.

V případě, že součet vnějších sil působících na systém je nulový, je z (2.4) $\mathbf{P} = \text{konst}$, což znamená, že *celková hybnost systému se zachovává*.

Další důležitou veličinou je *moment hybnosti systému*. Pro s -tý hmotný bod je moment hybnosti vzhledem k počátku souřadnic

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{r}_s \times \mathbf{p}_s = \mathbf{r}_s \times m_s \dot{\mathbf{r}}_s. \quad (2.5)$$

Z rovnice (2.1) plyne, že

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s = \mathbf{r}_s \times \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_s \times m_s \dot{\mathbf{r}}_s) = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_s, \quad (2.6)$$

což znamená, že časová derivace momentu hybnosti s -tého hmotného bodu je rovna momentu síly, která na tento hmotný bod působí.

Sečtou-li se rovnice (2.6) pro všechny hmotné body systému, vychází, že

$$\sum_s \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s = \sum_s \frac{d}{dt} \mathbf{M}_s = \frac{d}{dt} \sum_s \mathbf{M}_s = \frac{d}{dt} \mathbf{M}. \quad (2.7)$$

Derivace podle času z celkového momentu hybnosti systému je rovna součtu momentů všech sil působících na systém, jak vnitřních, tak vnějších. Vliv vnitřních sil nezaniká jenom díky třetímu Newtonovu zákonu. Namísto toho je potřebná více omezující podmínka, vyžadující, aby vnitřní síly byly *centrální*, tj. aby jejich směry byly totožné se spojnicí hmotných bodů. Po těchto výhradách se rovnice (2.7) redukuje na

$$\sum_s \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s^{(e)} = \frac{d}{dt} \mathbf{M}. \quad (2.7')$$

Z těchto výsledků dále plyne, že v případě, je-li celkový moment vnějších sil nulový, bude $\mathbf{M} = \text{konst}$, což značí, že *celkový moment hybnosti systému se zachovává*.

Získané teoremy zachování hrají v mechanice důležitou roli. V některých případech určení veličin, zachovávajících konstantní hodnotu, je přímo řešením úlohy.

ENERGIE

Pro změření celkového účinku síly je přirozené znát integrál z této síly podél dráhy hmotného bodu, na který tato síla působí. Z rovnic (2.1) máme

$$\int_1^2 \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s = \int_1^2 \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \cdot d\mathbf{r}_s = \left[\frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2 \right]_1^2. \quad (2.8)$$

Tento křivočarý integrál je skalární veličinou a určuje *práci, kterou koní síla*. V soulase s tím, že je nutné popisovat pohyb veličinami zachovávajícími konstantní hodnotu, předpokládá se, že tato práce se nashromažďuje ve hmotném bodě jako *kinetická energie pohybu*. Veličina $\frac{1}{2}m_s\dot{\mathbf{r}}_s^2$ z rovnic (2.8) je tedy kinetickou energií T_s s -tého hmotného bodu.

Provede-li se součet přes všechny hmotné body systému, je

$$\int_1^2 \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s = \sum_s \int_1^2 \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s = \sum_s |T_s|_1^2 = T^{(2)} - T^{(1)}, \quad (2.9)$$

kde $T^{(2)}$ a $T^{(1)}$ označují konečnou a počáteční hodnotu celkové kinetické energie systému.

V některých případech součet $\sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r}_s$ může být vyjádřen jako úplný diferenciál ($-dV$), kde $V = V(x_i)$ je funkcí souřadnic x_i . Potom práce vykonaná silami není závislá na tvaru trajektorií hmotných bodů a závisí pouze na počáteční a koncové poloze těchto bodů. Takové síly a odpovídající jim systémy nazýváme potom *konzervativními*. Při tomto omezení rovnice (2.9) dává

$$V^{(1)} + T^{(1)} = V^{(2)} + T^{(2)}. \quad (2.10)$$

Z tohoto vztahu plyne, že celková energie $E = T + V$ systému se zachovává; přitom je ovšem možná vzájemná změna její potenciální a kinetické složky T a V .

Lze ukázat, že zatímco pojem kinetické energie nepostrádá „reálností“, nelze totéž tvrdit o energii potenciální. Potenciální energie se jeví v jistém smyslu jako fiktivní, určovaná tak, že změny její velikosti přesně kompenzují nějaké změny kinetické energie. Potom ta okolnost, že součet těchto dvou veličin zachovává konstantní hodnotu, není neočekávaná. Leč podobné námitky lze mít i k „reálnosti“ sil, které lze považovat za vyvažující členy matematických rovnic. Potíže jsou v obou případech řešeny díky tomu, konečným cílem mechaniky je popis pohybu systému. Zavádění nových termínů pro libovolné, dobře určené veličiny spojené s pohybem je přípustné, jestliže je tím usnadněno řešení uvedené úlohy. V případě, že rozličné veličiny jsou nazvány energií, nelze pochybovat, že tato okolnost pomáhá při usnadnění popisu.

Praktický význam pojmu energie je v tom, že všechny mechanické vlastnosti složitěho systému lze popsat zavedením matematické formy omezeného počtu skalárních funkcí – energií. Analytická mechanika umožňuje obecné rozvinutí této myšlenky.

PRINCIP MINIMA ENERGIE

V předcházejících částech byl konzervativní systém definován jako systém, v kterém jsou složky síly dány jako

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \text{kde } V = V(x_i). \quad (2.11)$$

Je-li tento systém v rovnováze, potom

$$F_i = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 3N). \quad (2.12)$$

Posledních $3N$ podmínek je nutným požadavkem, aby funkce V nabývala stacionárních hodnot. Znamená to, že při rovnováze konzervativního systému jeho potenciální energie

má stacionární hodnotu. Výraz *princip minima energie* je spojen s tím, že zkoumaný stav rovnováhy je obvykle stabilní, není to ovšem obecně nevyhnutelné.

Tento výsledek je obvykle nazván „principem“, ale jak už bylo ukázáno, plyne z definice konzervativního systému. Jde o jednodušší formu metody analytické mechaniky, použitelnou k dosti ohraničenému počtu úloh, týkajících se rovnováhy konzervativních systémů.

VAZBY

Je možné, že pohyb systému je nějakým způsobem omezen *vazbami*. To může být definováno jako geometrické omezení pohybu. Elementárním příkladem je matematické kyvadlo, u kterého je pohyb omezen tak, že závaží kyvadla (idealizovatelné jako hmotný bod) zůstává na konstantní vzdálenosti l od pevného bodu závěsu $\mathbf{a}$. Toto je příklad na *holonomní vazby*, které lze vyjádřit *vazbovou rovnicí*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = l^2,$$

kde $\mathbf{r}$ je polohovým vektorem zakončení kyvadla. Základní vlastností holonomních vazeb je existence jednoho nebo několika *algebraických* vztahů, spojujících některé (nebo všechny) prostorové a časové souřadnice hmotných bodů systému. Jiným příkladem je třeba hmotný bod při svém pohybu v rovině (nemusí být v prostoru nepohyblivá) a Atwoodův padostroj, v němž dva hmotné body jsou spojeny nití konstantní délky. Tuhé těleso je zvláště jednoduchý typ systému s holonomními vazbami, ve kterém jsou vzdálenosti mezi všemi body neproměnné.

Všechny vazby nejsou holonomní — např. bod umístěný na povrchu pevné koule, jehož pohyb je určen nerovností $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \geq a^2$, vyjadřující tu skutečnost, že vzdálenost bodu od středu koule (o polohovém vektoru $\mathbf{r}_0$) nemůže být menší než poloměr této koule. Dále disk s horizontální osou rotace rotující po horizontální rovině bez tření je také neholonomní systém, jelikož vazba je vyjádřena neintegrovatelným diferenciálním vztahem obsahujícím souřadnice bodu dotyku disku s rovinou. (Řešení tohoto příkladu je v kap. VI.) Jiné tyty neholonomní vazby nelze ani matematicky vyjádřit. Obecné metody určení pohybu neholonomního systému mohou být vymyšleny jen v tom případě, že (???) jsou-li známy diferenciální rovnice vazeb. Ostatní případy vyžadují samostatného pojednání a nemusí být vždy řešitelné.

Je-li systém podroben m vazbovým podmínkám, potom v důsledku toho m z původních $3N$ proměnných, jež popisovaly systém, se stávají závislými. Mluví se pak o tom, že systém má pouze $3N - m$ *stupňů volnosti*. Někdy je obtížné vybrat závisle proměnné účelně. Později ukážem(???), že tuto obtíž lze obejít pomocí neurčitých součinitelů, zavádějících symetrii v řešení úlohy.

V obecném případě jsou pro zachování vazeb, jež omezují pohyb systému, nevyhnutelné síly. Tyto síly nejsou zpočátku známy. Znalost jejich velikosti není často důležitá, neboť je lze obvykle z pohybových rovnic vyloučit hned zpočátku a nebo pro případy, kdy tyto síly nelze vyloučit, jsou známy metody pro jejich určení (viz kap. VI). Jestliže vazbové podmínky nezávisí na čase, pak odpovídající síly, které nejsou nutně konstantní, nebudou během pohybu konat práci. V důsledku toho se takovéto vazby obvykle nazývají *nepracovními*. Časově závislé vazby nejsou nepracovní.

Vazby jsou idealizované pojmy zaváděné pro usnadnění řešení mechanických problémů. V obecném případě představují vysoce zjednodušené formy složitých systémů. Takový je např. případ pohybu hmotného bodu po horizontální rovině. V reálném případě byla by rovina povrchem pružného pevného tělesa a mírně by se deformovala účinkem váhy před-

mětu. Idealizací lze pak zavést geometrickou rovinu a spojitě reálné síly reakcí nahradit nespojitými vazbovými silami. Takové nespojitě síly nejsou Newtonovými zákony předvídané, takže je nevyhnutelný nový postulát [představovaný nerovností (2.18)], než bude možné je zahrnout ve vhodnou matematickou soustavu.

ZOBEČNĚNÉ SOUŘADNICE

Při řešení většiny matematických úloh mechaniky nelze dosáhnout úspěchu bez speciálního výběru soustavy souřadnic. Vzhledem k jednoduchosti se používá kartézské soustavy nejčastěji, není však vždy nejvýhodnější. Např. při zkoumání pohybu hmotného bodu pod vlivem centrální síly je mnohem výhodnější rovinná polární soustava souřadnic.

Jiné soustavy souřadnic budou uvažovány v obecném případě a v dalším budou stanoveny vhodným způsobem. Souřadnice budou obvykle vzdálenosti nebo úhly, mohou to být ovšem i další veličiny, zvláště podle rozšířených zobecnění metod klasické mechaniky. Pohybové rovnice vyjádřené v *zobecněných souřadnicích* mají rovněž zobecněnou vnější formu, avšak kolem některých jejích členů mohou vznikat nejasnosti, totiž je-li možné na ně pohlížet jako na „silové“ členy nebo jako na členy vystihující „časovou změnu hybnosti“. Příkladem tohoto sporu jsou odstředivá „síla“ a Coriolisova „síla“; obě jsou spojeny s otáčející se soustavou souřadnic. Žádná z nich není spojena s nějakým vnějším působením; jsou to fiktivní síly, vznikající při daném způsobu popisu jako vlastnost použité soustavy souřadnic. Při vektorovém přístupu tyto fiktivní silové členy velmi komplikují pohybové rovnice. Při použití analytické metody se tyto síly objevují automaticky jako výsledky systematicky prováděných matematických operací; v tom spočívá jedna ze značných předností této metody.

Výhoda zobecněných soustav souřadnic je i v tom, že ve velkém počtu případů vazby jsou vhodnou volbou soustavy souřadnic automaticky vzaty v úvahu. Je pak zbytečné psát $3N$ rovnic a m vazbových podmínek. Tyto úvahy lze dobře objasnit rozбором pevného tělesa, jehož pohyb se určuje třemi souřadnicemi (možno-li ještě kartézskými) těžiště v souhrnu se třemi úhly.

KONFIGURAČNÍ PROSTOR

Určení pohybu jediného hmotného bodu je úlohou mechaniky ve třech dimenzích. Při dvou bodech může být každý popsán třemi souřadnicemi; také lze systém dvou bodů uvažovat jako jediný bod v šesti-rozměrném prostoru. Rozdíl je pochopitelně pouze v terminologii, přičemž potíže filosofického charakteru lze lehko odstranit, uvažujeme-li toliko šest proměnných, a nikoliv šest dimenzí. Nicméně geometrický popis může být velmi jasný a prospěšný, jelikož k objasnění důkazů může být použito jednoduchých zobrazení.

V obecném případě úloha o pohybu N hmotných bodů může být studována jako úloha o pohybu jednoho materiálního bodu po *trajektorii* v $3N$ -rozměrném prostoru. Tento prostor se nazývá *konfiguračním prostorem*. Vazby potom omezují tento pohyb v nějakém *podprostoru* o menším počtu rozměrů. Tato terminologie je použitelná pro libovolnou soustavu zobecněných souřadnic.

PRINCIP VIRTUÁLNÍ PRÁCE A D'ALEMBERTŮV PRINCIP

Je možné a často potřebné představit si libovolné okamžiky změny polohových vektorů hmotných bodů systému. Účelem použití takových změn, kterým se říká *virtuální posunutí*, je nalezení jakési matematické sondy, jež má odhalit vlastnosti systému. Nekonečně malé virtuální posunutí jakéhokoliv s -tého bodu bude označeno $\delta \mathbf{r}_s$.

Jestliže je systém v rovnováze, potom při definici

$$\mathbf{F}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (2.13)$$

plyne, že

$$\mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0 \quad (2.14)$$

a také

$$\sum_s \mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.15)$$

Výsledky (2.14) a (2.15) jsou triviální matematické vývody, které plynou z definice rovnováhy systému. Jestliže však síly $\mathbf{F}_s$ jsou spojitými funkcemi souřadnic, pak má rovnice (2.15) nový fyzikální význam, který lze symbolicky vyjádřit jako

$$\delta W = 0. \quad (2.16)$$

Tento výsledek je matematickou formulací *principu virtuální práce*, který tvrdí:

„Práce, vykonaná při libovolném nekonečně malém virtuálním posunutí systému z rovnovážné polohy, je nulová.“

Jestliže v systému existují vazby, mohou být síly rozděleny na *aktivní* (nebo *vtištěné*) síly ($\mathbf{F}_s^{(a)}$) a na *vazbové síly* ($\mathbf{F}_s^{(c)}$), takže

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^{(c)} + \mathbf{F}_s^{(a)}. \quad (2.17)$$

Rovnice (2.15) pak ovšem je

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_s + \sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.15')$$

Poslední rovnici nelze považovat za tvrzení odpovídající práci virtuálních posunutí, protože nespojitá podstata vazbových sil je v pojmu vazeb samém. Tuto potíž lze obejít zavedením *nového postulátu*:

$$\mathbf{F}_s^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \geq 0 \quad (2.18)$$

pro všechna $\delta \mathbf{r}_s$ slučitelná s vazbami.

Uvedená nerovnost se týká *směrů* možných virtuálních posunutí vzhledem k vazbovým silám. Její oprávněnost lze ověřit na takových elementárních příkladech systémů s vazbami, jako je nepohyblivý hmotný bod na horizontální rovině; v tomto případě jedinými posunutími hmotného bodu, slučitelnými s vazbami, jsou posunutí podél roviny nebo od ní vzhůru.

Spojíme-li vztahy (2.15') a (2.18), je

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \leq 0. \quad (2.19)$$

Jediné síly, které zde vystupují, jsou aktivní síly, které působí na systém a které lze považovat za spojitě funkce souřadnic. Je tedy možné ještě jednou interpretovat tento výsledek jako tvrzení, které se týká práce vykonané aktivními silami při posunutí v soulase s vazbami:

$$\delta W \equiv \sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \leq 0. \quad (2.19')$$

Jestliže nyní zavedeme taková virtuální posunutí, která jsou z geometrického hlediska vratná (označená jako δ'), bude (2.19)

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \leq 0$$

a

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot (-\delta' \mathbf{r}_s) \leq 0.$$

Tyto výroky jsou slučitelné jen tehdy, když

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot \delta' \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.20)$$

Poslední výraz je *zobecněná forma principu virtuální práce*, která tvrdí:

„Práce, vykonaná aktivními silami působícími na systém při vratných nekonečně malých virtuálních posunech slučitelných s vazbami z rovnovážné polohy, je nulová.“

Jelikož pohyb systému je omezen vazbami, nebudou všechna $\delta' \mathbf{r}_s$ nezávislá. Z toho plyne, že na rozdíl od výsledku vztahujícího se k rovnici (2.15) nelze z rovnice (2.20) dojít k tomu, že $\mathbf{F}_s^{(a)} = 0$. Leč v mnoha případech lze přejít k soustavě zobecněných souřadnic (označených q_i), v které se rovnice vazeb uvažují automaticky. Pak vztah (2.20) může být psán jako

$$\sum_i Q_i^{(a)} \delta' q_i = 0. \quad (2.20')$$

V tomto případě se počet zobecněných souřadnic shoduje s počtem stupňů volnosti systému, tj. všechna zobecněná virtuální posunutí $\delta' q_i$ jsou na sobě nezávislá. Pak z (2.20') plyne, že

$$Q_i^{(a)} = 0. \quad (2.21)$$

Do této doby vyložené úvahy se vztahovaly toliko k systémům, jež byly v rovnováze. Pohybující se systémy mohou být k nim rovněž přiřazeny zobecněním důkazu. Dříve nalezené pohybové rovnice byly

$$\mathbf{F}_s = \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s), \quad (2.1)$$

tj.

$$\mathbf{F}_s - \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) = 0.$$

Tak jako dříve, i nyní pro libovolné virtuální posunutí je

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s - \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \right) \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.22)$$

Síly $\mathbf{F}_s$ lze rozdělit na vazbové a aktivní, takže

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_s + \sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \right) \cdot \delta \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.22')$$

Omezíme-li se na posunutí slučitelná s vazbami, lze nanovo *postulovat*, že

$$\mathbf{F}_s^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_s \geq 0, \quad (2.18)$$

z čehož a z (2.22') plyne, že

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \right) \cdot \delta \mathbf{r}_s \leq 0. \quad (2.23)$$

Další omezení týkající se vratnosti virtuálních posunutí dává:

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \right) \cdot \delta' \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.24)$$

Zde opět nelze cokoliv tvrdit o veličinách v závorce, protože přítomnost vazeb nedovoluje posuny považovat za nezávislé. Tuto potíž je přece jenom možné v některých případech překonat přechodem na vhodnou soustavu zobecněných souřadnic. Obecný způsob, pomocí něhož je možné tento přechod uskutečnit, bude vyložen v následující kapitole jako podstatná část analytické metody.

První člen formule (2.24) lze opět ztotožnit s prací vykonanou za dobu virtuálního posunutí. Smysl druhého členu je poměrně sporný. Obvykle namísto $(-dm_s \dot{\mathbf{r}}_s)/dt$ se píše veličina $\mathbf{I}_s$, které se říká *setrvačná síla (inerciální)*. Rovnice (2.24) je pak

$$\sum_s (\mathbf{F}_s^{(a)} + \mathbf{I}_s) \cdot \delta' \mathbf{r}_s = 0. \quad (2.25)$$

Tento součet aktivních a setrvačných sil nazveme silami *efektivními*. Pomocí těchto nových definic lze dojít k následujícímu tvrzení:

„Celková práce, vykonaná efektivními silami při vratném nekonečně malém virtuálním posunu libovolného dynamického systému, je nulová.“

Minulé tvrzení je známé jako *d'Alembertův princip*. Jeho slovní formulace byla naznačena poněkud umělým rozbořením některých členů jako setrvačných sil a je možné pochybovat, má-li zde výraz „vykonaná práce“ jakýkoliv reálný smysl. Nicméně se to jeví jako nedůležitá hra se slovy. Tvrzení tohoto principu dokazuje oprávněnost vztahu (2.24). Poslední princip se skutečně jeví jako nejobecnější tvrzení v celé mechanice hmotných systémů a všechny dále uváděné principy, včetně principu Hamiltonova mohou být z něho odvozeny.

Pohybové rovnice Newtonovy lze rovněž odvodit z rovnice (2.24), ale, a to je patrné z výkladu, obráceně odvození tohoto principu z pohybových rovnic vyžaduje přijetí nového postulátu, vyjádřeného vzorcem (2.18). To se ale rozchází s názorem, že celá mechanika je založena na Newtonových zákonech. Potíž je v samé podstatě vazeb. Pro výpočty se používá takové idealizace, že se dochází ke nespojitým silám. Konec konců taková bytí v přírodě nejsou, i když se k nim reálné podmínky mohou přibližovat. Je-li taková idealizace vítaná, pak pro její zahrnutí v obecný popis*) je nevyhnutelný doplňující postulát, ležící mimo Newtonovu soustavu. Leč termínu „Newtonova mechanika“ bude často používáno v tak širokém smyslu, že bude zahrnovat jak d'Alembertův princip, tak Newtonovy zákony.

D'Alembertova principu se často používá jako prostředku k určení vazbových sil. Bezprostředně to není možné, jelikož sám obsah principu speciálně takové síly vylučuje. Způsob je založen na zavedení druhého systému, ve kterém se jedna nebo několik vazbových sil zaměňuje aktivní silou. Tu je možné vypočítat při uskutečnění virtuálního posuvu systému. Takto obdržená hodnota pak představuje vazbovou sílu v původním systému.

*) Druhý pohled je takový, že vztah (2.18) je možné odvodit z Newtonových zákonů při využití nějakého limitního procesu. Často je to přípustné, ale není-li obecný důkaz, je lepší vztah (2.18) považovat za nezávislý postulát.

Obrátíme nyní pozornost na speciální případ rovnice (2.24). Předpokládáme, že virtuální posuv splývá se skutečným posuvem systému za dobu dt . Potom

$$\delta' \mathbf{r}_s = \dot{\mathbf{r}}_s dt, \quad (2.26)$$

přítom (2.24) nyní je

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s^{(a)} - \frac{d}{dt}(m_s \dot{\mathbf{r}}_s) \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_s dt = 0,$$

tj.

$$\sum_s \mathbf{F}_s^{(a)} \cdot d\mathbf{r}_s - \frac{d}{dt} \left(\sum_s \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2 \right) dt = 0. \quad (2.27)$$

Výraz $\sum_s \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2$ je zřejmě kinetická energie T systému a za předpokladu, že systém je konzervativní (tj. $\mathbf{F}_s^{(a)} = -\nabla_s V$), nabývá nyní výraz (2.27) vzhledu:

$$d(V + T) = 0. \quad (2.28)$$

Tento výraz tvrdí, že celková energie systému se během pohybu nemění, což znamená, že princip zachování energie byl nyní znovu získán jako zvláštní případ d'Alembertova principu.

iii. LAGRANGEOVY ROVNICE

Cílem této kapitoly je poskytnout metodu pro sestavení pohybových rovnic, která bude odlišná od metody Newtonovy. Na základě energetických výrazů sestavíme pokud možno všechny rovnice; použijeme přitom zobecněných souřadnic, s nimiž budeme pak moci pracovat v libovolném systému.

KONZERVATIVNÍ SYSTÉMY BEZ VAZEB

Pro systém N hmotných bodů je $3N$ pohybových rovnic typu

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i), \quad (3.1)$$

při čemž kinetická energie systému je

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2. \quad (3.2)$$

Z těchto dvou rovnic plyne, že

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (3.3)$$

Při konzervativním systému jsou složky sil F_i dány vztahy

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (3.4)$$

kde $V = V(x_i)$ je potenciální energie systému. Z toho (3.3) nyní je:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (3.5)$$

Tato rovnice již částečně odpovídá shora stanoveným požadavkům, aby totiž pohybové rovnice byly vyjádřeny pomocí dvou skalárních funkcí T a V . Následující postup spočívá v záměně kartézské soustavy souřadnic zobecněnými souřadnicemi.

Nechť je v této soustavě charakteristická souřadnice označena jako q_i , při čemž v obecném případě

$$q_i \equiv q_i(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) \equiv q_i(x_j, t), \quad (i(\text{neboj?}) = 1, 2, \dots, 3N). \quad (3.6)$$

Zahrnutí závislosti q_i na t je vhodné, jelikož to může být žádoucí při zkoumání pohybující se soustavy souřadnic.

Vzhled rovnic (3.5) již podnětně připomíná zmíněnou obecnou metodu a odpovídající derivace v novém souřadnicovém systému. Nejprve

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.7)$$

Zavedením inverzních*) vztahů k (3.6)

$$x_j = x_j(q_i, t) \quad (3.6')$$

lze dospět k výrazům

$$\dot{x}_j \equiv \frac{dx_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t},$$

odkud

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (3.8)$$

Vztah (3.7) nyní lze psát takto:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (3.9)$$

Derivováním posledních vztahů podle času dostáváme*)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_j \left[m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \right] = \\ &= \sum_j \left[F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \right) \right] = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde

$$Q_i \equiv \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (3.11)$$

Veličiny Q_i lze označit za složky zobecněných sil. Jestliže je navíc systém konzervativní, potom

$$Q_i = - \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (3.11')$$

a rovnice (3.10) nyní jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}; \quad (3.10')$$

obsahují už jenom derivace skalárních veličin T a V . Při zobecnění se tedy objevily, kromě členů z rovnic (3.5), členy $\partial T / \partial q_i$. Je to zobecněná forma takových členů, jako je odstředivá

*) Existence takových inverzních vztahů je předpokládána. Matematicky tomu nemusí tak být, ale ve všech fyzikálně zajímavých případech je tento předpoklad oprávněný, vyjma snad u omezeného počtu singulárních bodů.

*) Poznamenejme, že $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$.

síla nebo Coriolisova síla, které se obvykle nazývají fiktivní. Jejich vznik lze připsat na úkor křivosti souřadných ploch a zanikají identicky pro jakoukoliv kartézskou soustavu.

Rovnice (3.10') lze napsat v kompaktnější formě zavedením nové funkce L , zvané *La-grangeova funkce* a dané vztahem

$$L = T - V. \quad (3.12)$$

Rovnice (3.10') nyní jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.13)$$

neboť podle definice $\partial V / \partial \dot{q}_i = 0$.

3N rovnic (3.13) lze považovat za pohybové rovnice systému, jelikož jsou jiným vyjádřením rovnic (3.1). V této podobě pak vlastnosti systému vyjadřují elegantněji a jednodušeji. Je nutné poznamenat, že omezení na konzervativní systémy stále platí. Obecný případ je dán vztahem (3.10), který je zdokonalením prvotní formulace Newtonových zákonů, jelikož členy, vyjadřující fiktivní síly (a způsobující těžkosti při svém vyjádření), stanoví se zde automaticky výpočtem derivací $\partial T / \partial q_i$. Je ovšem nevyhnutelné ještě zvlášť stanovit každou složku zbývajících sil.

NEKONZERVATIVNÍ SYSTÉMY

Předpokládejme, že komponenty zobecněné síly lze zadat ve tvaru

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}, \quad (3.14)$$

kde $M = M(q_i, \dot{q}_i, t)$ je nějaká funkce času, souřadnic a jejich derivací. Potom (3.10) lze psát jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.13)$$

je-li

$$L = T - M. \quad (3.15)$$

Bylo by možné předpokládat, že omezení, zavedené výrazem (3.14) na tvar funkční závislosti složek Q_i , je příliš silné na to, aby mohlo sloužit jakémukoliv užitečnému cíli. Ve skutečnosti se však tímto způsobem zahrnuje velmi vážný případ pohybu nabitých částic v elektromagnetickém poli. Ve vektorovém označení je síla působící na částici o náboji e dána (při Gaussově soustavě jednotek) Lorentzovým výrazem

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right); \quad (3.16)$$

v této podobě vyjádřená síla nemá vzhled vzorce (3.14), lze to však učinit zavedením skalárního potenciálu φ a vektorového potenciálu $\mathbf{A}$, které popisují pole jinou formou. Platí, že

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.17)$$

???

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Pomocí těchto potenciálů φ a $\mathbf{A}$ složky Lorentzovy síly po některých úpravách nabývají tvaru:

$$F_i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) e \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right), \quad (3.18)$$

což ale odpovídá (3.14) v kartézských souřadnicích. Zbývá nyní přejít na zobecněné souřadnice. Substituce $M = e \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right)$ do (3.11) poskytuje pro složku zobecněné síly tento výraz:

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right]. \end{aligned}$$

Použije-li se (3.8), je dále

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

jelikož

$$M = M(\dot{x}_j, x_j), \quad x_j = x_j(q_i, t).$$

Poslední výsledek je ve shodě s potřebami (3.14). Nyní vyhovuje Lorentzova síla těm obecným požadavkům, jež umožňují její zařazení do Lagrangeova formalismu. Pohybové rovnice částice (nabitého hmotného bodu), která se pohybuje v elektromagnetickém poli, nyní jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (3.13)$$

kde

$$L = T - M = T - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (3.20)$$

VAZBY

Zatím jsme předpokládali, že všech $3N$ sořadnic popisujících stav systému N hmotných bodů je nezávislých. Systém může být ovšem omezen vazbami, takže počet stupňů volnosti bude menší než $3N$. Síly potřebné pro realizaci vazeb se při pohybu systému mění a nemohou být určeny potud, pokud není znám samotný pohyb. V důsledku toho je těžké rozpoznat, jak je možné je zahrnout v potenciální funkci, z které, jak Lagrangeovo pojetí předpokládá, se síly odvozují.

Jsou-li vazby *holonomní*, mohou být do Lagrangeova formalismu zahrnuty. V tomto případě je třeba použít d'Alembertova principu. Z (2.24) může být tento princip vyjádřen takto:

$$\sum_i \left[F_i^{(a)} - \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) \right] \delta x_i = 0, \quad (3.21)$$

kde $F_i^{(a)}$ jsou složky vtištěných sil (tj. *vyklučují se vazbové síly*). Explicitní připuštění vratnosti nekonečně malých posunutí zde není, jelikož je obsaženo v podmínce holonomnosti vazeb.

Jelikož δx_i jsou podrobeny rovnicím vazeb, nemohou být všechny libovolné, takže není možné každý koeficient rovnice (3.21) položit rovným nule. Především je tedy nevyhnutelné přejít k takovým souřadnicím, které by se mohly měnit nezávisle na sobě. To lze uskutečnit následujícím způsobem.

Nechť vazbovými rovnicemi (podle dřívějšího předpokladu jsou vazby holonomní) je r rovnic typu

$$f_l(x_i, t) = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \dots, r). \quad (3.22)$$

Libovolných $3N$ funkcí veličin x_i a t dává soustavu zobecněných souřadnic při podmínce jednoznačného řešení pro x_i . Zvolme jako prvních r funkcí z této soustavy r funkcí $f_l(x_i, t)$, vystupujících v (3.22) a zbývajících $n = 3N - r$ libovolným způsobem, tj.

$$q_l(x_i, t) = f_l(x_i, t) (= 0), \quad (l = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (3.23a)$$

$$q_l(x_i, t) = F_l(x_i, t), \quad (l = r + 1, r + 2, \dots, 3N), \quad (3.23b)$$

kde $F_l(x_i, t)$ nejsou identicky rovny nule.

Pomineme-li nulové podmínky, tu rovnice (3.23) určují obecnou transformaci souřadnic mezi dvěma soustavami $3N$ proměnných. V libovolném fyzikálně zajímavém případě mohou být tyto rovnice vyřešeny, přičemž dostaneme

$$x_i = x_i(q_j, t) \quad (j = 1, 2, \dots, 3N). \quad (3.24)$$

Jelikož toto je obecná, nikoliv zvláštní transformace souřadnic, lze nyní použít obecného důkazu z první části této kapitoly k přepisu rovnice (3.21) do podoby

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (3.25)$$

kde

$$Q_i^{(a)} = \sum_j F_i^{(a)} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}. \quad (3.25')$$

Vezmou-li se nyní v úvahu vazbové rovnice (3.22), tu prvních r členů součtu (3.25) bude totožně nulových, jelikož odpovídající δq_i jsou rovněž nulové. Zbývá tak

$$\sum_{i=r+1}^{3N} \left[Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (3.26)$$

Třebaže je tento vztah vzhledově podobný rovnici (3.25), zásadně se od ní liší, jelikož všechny $n = 3N - r$ souřadnice q_i jsou nezávisle proměnné. Koeficienty při δq_i lze tudíž položit rovné nule. Z toho

$$Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \quad (i = r + 1, r + 2, \dots, 3N). \quad (3.27)$$

Tyto rovnice jsou formálně identické s rovnicemi (3.10) a při stejných omezeních mohou být psány jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = r + 1, r + 2, \dots, 3N). \quad (3.27')$$

Takto jsme ukázali, že i při holonomních vazbách mohou být pohybové rovnice psány v Lagrangeově formě. Další rozšíření je možné jen na takové neholonomní případy, kde jsou vazby vyjádřeny neintegrovatelnými diferenciálními vztahy. Rozbor tohoto případu odložíme až do zkoumání variačních principů v kapitole VI. Pak bude možné vyložit i způsob (metodu neurčitých součinitelů) určení velikosti vazbových sil.

RAYLEIGHOVA DISIPAČNÍ FUNKCE

V mnoha systémech působí *disipační síly*. Tento termín se vztahuje k takovým procesům, jako je tření, při nichž systém ztrácí energii. V principu by dostatečně podrobné zkoumání dovolilo určit tyto síly v podobě, která by umožnila jejich popis metodou do této doby studovanou. To by však vedlo k nežádoucím komplikacím, takže je lepší zkoumat tyto síly z fenomenologického hlediska.

Experimentálně bylo shledáno, že disipační síly se v mnohých případech mění se složkami rychlosti podle jednoduchého vztahu:

$$F_i^{(d)} = -k_i \dot{x}_i, \quad (3.28)$$

kde k_i jsou konstanty. Tyto síly mohou být zahrnuty v náš analytický popis pomocí nové veličiny — *disipační Rayleighovy funkce*, dané vztahem

$$R = \frac{1}{2} \sum_i k_i \dot{x}_i^2, \quad (3.29)$$

z které

$$F_i^{(d)} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}. \quad (3.30)$$

Za předpokladu, že systém může být po ostatních stránkách popsán Lagrangeovou metodou, pohybové rovnice v kartézských souřadnicích pak jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (3.31)$$

Při transformaci na zobecněné souřadnice jsou složky zobecněné disipační síly dány jako

$$Q_i^{(d)} = \sum_j F_j^{(d)} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \sum_j k_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

Jelikož z transformačních rovnic plyne, že

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.8)$$

bude

$$Q_i^{(d)} = - \sum_j k_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[-\frac{1}{2} \sum_j k_j \dot{x}_j^2 \right] = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}.$$

Kombinujeme tento výsledek s výsledkem transformace nemodifikované formy pohybových rovnic (tj. při vyloučení disipačních sil) dostáváme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3.33)$$

Takto je vidět, že disipační systém může být při odpovídajících okolnostech popsán rozšířenými Lagrangeovými rovnicemi.

iv. POUŽITÍ LAGRANGEOVÝCH ROVNIC

V této kapitole je Lagrangeovou metodou zkoumáno několik vybraných úloh. Jelikož snahou této metody je poskytnout účelné odvození pohybových rovnic, nebude vůbec nutné sledovat všechny podrobnosti pohybu. Zkoumané úlohy nevyčerpávají samy všechny možné případy. Naším cílem je dát názornou představu o použití Lagrangeovy metody studiem několika vybraných příkladů, které lze po právu považovat za zajímavé.

Velké těžkosti při řešení libovolné úlohy z mechaniky jsou spojeny s výběrem takové soustavy souřadnic, ve které by pohybové rovnice měly tvar nejvíce vyhovující dalším potřebám. To je stejně dobře použitelné jak k Lagrangeově metodě, tak i k libovolné jiné metodě. Není žádného pravidla pro výběr takovéto soustavy souřadnic, takže obvyklou metodou je metoda zkoušek a chyb. Pro nedostatek místa vynecháme při výběru soustavy souřadnic chyby, takže budeme používat jen takové soustavy souřadnic, které se po předchozím zkoumání ukázaly jako vyhovující.

Je nutné poznamenat, že v mnohých případech se používá tzv. *cyklických (skrytých)* souřadnic, umožňujících jednoduché získání prvních integrálů odpovídajících pohybových rovnic. To vede k velkému zdokonalení postupu, jenž bude podrobně probrán v souvislosti s Hamiltonovou metodou v následující kapitole.

CORIOLISOVA A ODSŘEDIVÁ SÍLA

Zavedení otáčející se soustavy souřadnic často dělá mechanickou úlohu složitější a nikoliv jednodušší, ovšem jindy, jako v případě pohybu tělesa v zemské atmosféře, je to nevyhnutelné.

Uvažujme transformaci soustavy $Oxyz$ na soustavu $Ox'y'z'$, otáčející se úhlovou rychlostí ω kolem osy Oz . Transformační rovnice jsou:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \\ y &= y' \sin \omega t + x' \cos \omega t, \\ z &= z'. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Kinetická energie hmotného bodu je:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) + \dot{z}'^2 + \\ &+ m\omega(x'\dot{y}' - \dot{x}'y') + \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dříve se dospělo k tomu, že člen $\partial T / \partial q_i$ z Lagrangeovy rovnice lze považovat za fiktivní sílu vznikající vlivem vlastnosti dané soustavy souřadnic. V tomto případě to je

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \quad (4.3)$$

s odpovídajícím vyjádřením pro $\partial T/\partial y'$ ($\partial T/\partial z' = 0$).

Dva členy výrazu (4.3) lze ztotožnit se složkami poloviny Coriolisovy síly, resp. odstředivé síly. Zbývající polovina složky Coriolisovy síly se získá z členu $d(\partial T/\partial \dot{x})/dt$ Lagrangeovy rovnice.

Nebudeme zkoumat žádnou dílčí úlohu týkající se Coriolisovy nebo odstředivé síly; naší snahou bylo pouze ukázat, jak je lze prostě z Lagrangeových rovnic obdržet. Liší se to od druhé, vektorové metody, která je principiálně rovněž použitelná, avšak při které často vznikají těžkosti, zvláště co se týče znaménka.

PROBLÉM DVOU TĚLES

Pohyb systému složeného ze dvou hmotných bodů, jejichž polohy jsou určeny polohovými vektory $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ a na které působí pouze konzervativní síly, lze popsat následující Lagrangeovou funkcí:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4.4)$$

Kinetická energie může být jinak psána jako

$$T = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2, \quad (4.5)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (= \text{vektor vzdálenosti částic}), \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (= \text{poloha těžiště systému}), \\ \mu &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (= \text{redukovaná hmotnost systému}), \\ M &= m_1 + m_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Tento způsob popisu nás přivádí k systému, který je tvořen hmotným bodem (o hmotnosti rovné součtu hmotností obou prvotních hmotných bodů) nacházejícím se v těžišti, a hmotným bodem o redukované hmotnosti systému, nacházejícím se v místě $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Ovšem jde o umělý model. Jeho smysl spočívá v tom, že při obvyklých omezeních člen Lagrangeovy funkce, rovný potenciální energii, je rozložitelný do dvou složek, podobně jako je tomu v rovnici (4.5). Potom máme

$$V = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{R}). \quad (4.7)$$

Předpokládáme-li oprávněnost tohoto vztahu, lze lagrangián L psát jako

$$L = L_1 + L_2, \quad (4.8)$$

kde (???) a pohyb původního systému dvou hmotných bodů v interakci se prakticky rozkládá na nezávislý pohyb dvou nezávislých systémů. Takové rozložení obvykle zjednodušuje řešení úlohy.

Rozložení dané (4.7) platí i v případě, kdy vnější síla, působící na systém, neexistuje, i v případě, kdy tato vnější síla, vztažená k jednotce, existuje a je stejná pro každý hmotný bod. Jak už bylo řečeno dříve, tato omezení se vyskytují často, takže má smysl zkoumat tuto úlohu v této podobě.

Je málo zajímavé sledovat dále pohyb systému, daný funkcí L_2 . Je účelnější hovořit o první složce s doplňujícím omezením:

$$V_1(\mathbf{r}) = V_1(r) \quad (r = |\mathbf{r}|), \quad (4.10)$$

tj. při pohybu pod vlivem *centrální síly*.

Použije-li se *sférických souřadnic*, je

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\dot{\varphi}^2), \quad (4.11)$$

odkud

$$L_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\dot{\varphi}^2) - V_1(r). \quad (4.12)$$

Z uvedeného je vidět, že veličina φ je *cyklickou souřadnicí*, tj. nevyskytuje se explicitě ve výrazu pro L_1 . Potom odpovídající Lagrangeova rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

dostává velmi jednoduchý tvar

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \sin^2\Theta \dot{\varphi}) = 0. \quad (4.13)$$

Bezprostřední integrace poskytuje

$$\mu r^2 \sin^2\Theta \dot{\varphi} = \text{konst.}, \quad (4.14)$$

přičemž tuto veličinu lze identifikovat jako moment hybnosti vzhledem k polární ose, a jak je patrné, je konstantní při určitém výběru této osy. Jestliže je polární osa zvolena tak, že má na počátku směr polohového vektoru $\mathbf{r}$, tu $\Theta = 0$, tj. konstanta v rovnici (4.14) je rovna nule. V průběhu dalšího pohybu r a Θ v obecném případě budou mít nenulové hodnoty. Z toho plyne pro další platnost (4.14), že veličina $\dot{\varphi}$ musí být nulová. To ale znamená, že po celou dobu pohybu polární osa a směr pohybu budou ležet v jedné rovině. Potom lze zadanou úlohu dobře řešit v *rovinné* polární soustavě souřadnic, přičemž tato rovina obsahuje vektory $\mathbf{r}$ a $\dot{\mathbf{r}}$. Lagrangian je potom dán vztahem:

$$L_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2) - V_1(r). \quad (4.15)$$

V tomto novém zápisu je Θ cyklická souřadnice a řešení odpovídající pohybové rovnice je

$$\mu r^2 \dot{\Theta} = \text{konst.} (= l). \quad (4.16)$$

Z poslední rovnice plyne, že se nastaví neproměnný moment hybnosti vzhledem k ose, procházející počátkem souřadnic a kolmé k rovině souřadnic. To je ve skutečnosti druhý Keplerův zákon pohybu planet a je důsledkem zavedení centrálních sil.

Pohybová rovnice vztažená k souřadnici r je složitější:

$$\begin{aligned} \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\Theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r} V_1(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial}{\partial r} V_1(r) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{l^2}{2\mu r^2} + V_1(r) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Na tuto rovnici lze pohlížet jako na pohybovou rovnici hmotného bodu při pohybu po přímce vlivem upraveného potenciálu daného vztahem:

$$V_r'(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V_1(r). \quad (4.18)$$

Další postup již vyžaduje předpoklady o konkrétním tvaru funkce $V_1(r)$.

Výše provedená odvození ukazují důležitost výběru soustavy souřadnic pro nalezení těch vlastností úlohy, které lze nazvat zákony zachování. Ačkoliv tyto zákony nepředstavují úplné řešení úlohy, představují nicméně její podstatnou část.

LARMORŮV TEORÉM

Na pohyb elektronu v poli kladně nabitého jádra lze pohlížet jako na klasickou úlohu dvou těles. Jelikož jsou vnější síly nulové, jsou podmínky předešlého příkladu splněny a pohyb se dělí na dvě samoatantné části. Zavedení vnějšího magnetického pole mění stav, protože vnější síla vztažená k jednotce hmoty nebude stejná pro každý hmotný bod a nebude tudíž možné vyjádřit vnější síly jako funkce pouze polohového vektoru $\mathbf{R}$ těžiště hmotností obou hmotných bodů.

Uvážíme-li ale mnohem větší hmotnost jádra, lze s dostatečnou přesností považovat toto jádro za nepohyblivé a sledovat pouze pohyb elektronu. Pak jde v podstatě o pohyb jen jednoho tělesa. Z úvah poslední kapitoly plyne, že působení magnetického pole na elektron je závislé na rychlosti prostřednictvím výrazu $(-\frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$, který je v lagrangiánu; coulombovské přitahování jádra je vyjádřeno funkcí $V(r) = -Ze^2/r$. Takto je

$$L = T - V(r) - \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}. \quad (4.19)$$

Předpokládejme, že magnetické pole je rovnoběžné s osou z a má konstantní intenzitu H_0 ; možná soustava kartézských složek vektoru $\mathbf{A}$ pak je:

$$A_x = -\frac{1}{2}H_0y, \quad A_y = \frac{1}{2}H_0x, \quad A_z = 0. \quad (4.20)$$

Pro řešení této úlohy jsou nejprůhodnější cylindrické souřadnice. Přejdeme-li k nim, je

$$A_\varrho = A_z = 0, \quad A_\Theta = \frac{1}{2}H_0\varrho, \quad (4.20')$$

rovnice (4.19) pak je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\Theta}^2 + \dot{z}^2) - V(\varrho, z) - \frac{e}{c}\varrho\dot{\Theta}\frac{1}{2}H_0\varrho. \quad (4.19')$$

Odtud plyne, že Θ je cyklická souřadnice; integrace odpovídající pohybové rovnici poskytuje

$$m\varrho^2\left(\dot{\Theta} - \frac{eH_0}{2mc}\right) = \text{konst.} \quad (4.21)$$

Jak bude patrné z následujících úvah, tento výsledek opět vyjadřuje zachování momentu hybnosti, ač zde jenom jeden člen $m\varrho^2\dot{\Theta}$ má takovéto vlastnosti. Pro další potřebu je výhodné uskutečnit následující transformaci souřadnic:

$$\varrho = \varrho', \quad z = z', \quad \Theta = \alpha + \omega_0 t, \quad \text{kde} \quad \omega_0 = \frac{eH_0}{2mc}. \quad (4.22)$$

Transformovaný lagrangian je:

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) - V(\varrho', z') - \frac{1}{2}m\varrho'^2\omega_0^2. \quad (4.23)$$

Neexistuje-li pak magnetické pole H_0 , původní lagrangian je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\Theta}^2 + \dot{z}^2) - V(\varrho, z). \quad (4.24)$$

Výrazy (4.23) a (4.24) jsou až na člen $\left(-\frac{1}{2}m\varrho'^2\omega_0^2\right)$ stejné. Lze dokázat, že poměr velikosti tohoto členu k velikosti členu $\left(\frac{1}{2}m\varrho^2\dot{\Theta}^2\right)$ při $H_0 \sim 10^4$ oersted je řádově 10^{-12} . Lze tedy i při velké přesnosti tento člen zanedbat a pokládat lagrangian (4.23) a (4.24) za totožné. Z toho plyne, že pohyb systémů popisovaný oběma lagrangiany je totožný. Fyzikálně to značí, že pohyb elektronu v homogenním magnetickém poli vzhledem k otáčející se soustavě souřadnic je shodný s pohybem v nepohyblivé soustavě souřadnic a bez pole. Tento výsledek lze vyjádřit tvrzením, že systém pod vlivem pole vykonává *precesní* pohyb s konstantní úhlovou rychlostí ω_0 .

Je nutné poznamenat, že ve skutečnosti jsme jen dokázali, že možné stavy pohybu dvou systémů jsou stejné. Lze ale také dokázat, že při *postupném* vytváření magnetického pole systém zachovává svůj stav pohybu vzhledem k soustavě souřadnic, otáčející se s odpovídající úhlovou rychlostí.

Tento výsledek může být rozšířen na víceelektronové systémy, jejichž elektrony se pohybují v poli centrálních sil vyvolaných jediným jádrem. Toto má pak široké použití v mikroskopické teorii magnetických vlastností hmoty.*)

SYMETRICKÝ VLČEK

Otáčející se vlček je příkladem pohybu tuhého tělesa. Tuhé těleso je systém, ve kterém holonomní časově nezávislé vazby omezují maximální počet stupňů volnosti na šest; v předloženém případě se tento počet zmenšuje na tři v důsledku toho, že požadujeme, aby se noha vlčku dotýkala podložky v jednom pevném bodě. Zanedbá-li se tření, které může na vlček působit, lze systém pokládat za konzervativní; jediná vtištěná síla je váha vlčku, působící v jeho těžišti.

Vazby jsou uváženy automaticky zavedením momentů setrvačnosti a deviačních momentů vlčku do pohybových rovnic. Jsou to kvazigeometrické veličiny a jestliže využijeme souměrnosti vlčku, musíme jeho osu souměrnosti ztotožnit s jednou z os kartézské soustavy souřadnic. Pak budou deviační momenty nulové, čímž vypadnou z úvah. V obecném případě se bude osa souměrnosti v prostoru pohybovat, a tak je nevyhnutelné stanovit spojení pohybující se soustavy s nepohyblivou. Vhodnými parametry pro popis polohy systému jsou, jak známo, *Eulerovy úhly*. Jsou tři: úhel Θ je úhlem mezi osou souměrnosti vlčku Oz' a nepohyblivou vertikální osou Oz , ψ je úhel mezi Ox (nepohyblivou v prostoru) a Ox' , což je průsečnice roviny kolmé k Oz' a horizontální roviny (osa Ox' se jmenuje *uzlová přímka*) a úhel φ , který je úhlem mezi Ox' a Ox'' , přičemž tato osa Ox'' je spojena s vlčkem a je kolmá k ose $Oz'(\equiv Oz'')$.

*) K dalšímu studiu tohoto teoremu lze použít knihy L. Rosenfelda „Theory of Electrons“ (Amsterdam, N. Holland Publ. Co. 1951).

Soustava souřadnic $Ox'y'z'$ se otáčí vzhledem k soustavě $Oxyz$ okamžitou úhlovou rychlostí Ω' . V soustavě $Ox'y'z'$ je

$$\Omega' = (\dot{\Theta}, \dot{\psi} \sin \Theta, \dot{\psi} \cos \Theta). \quad (4.25)$$

Soustava $Ox''y''z''$ (vzhledem ke které se vlček nepohybuje) se otáčí s úhlovou rychlostí ω vzhledem k $Ox'y'z'$. V této soustavě

$$\omega = (0, 0, \dot{\varphi}). \quad (4.26)$$

Vlček se takto otáčí vzhledem k nepohyblivé soustavě souřadnic $Oxyz$ s úhlovou rychlostí $\Omega = \Omega' + \omega$. V soustavě $Ox'y'z'$ je tato úhlová rychlost rovna

$$\Omega = (\dot{\Theta}, \dot{\psi} \sin \Theta, \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \Theta). \quad (4.27)$$

V základní soustavě kartézských souřadnic lze kinetickou energii vlčku vyjádřit jako

$$T = \frac{1}{2}(A\Omega_x^2 + B\Omega_y^2 + C\Omega_z^2 - 2D\Omega_y\Omega_z - 2E\Omega_z\Omega_x - 2F\Omega_x\Omega_y), \quad (4.28)$$

kde A, B, C jsou momenty setrvačnosti, D, E, F jsou deviační momenty. Vlček mění nepřetržitě svou orientaci vzhledem k soustavě os $Oxyz$; je-li tudíž poslední soustava považována za referenční soustavu, budou se pak veličiny A, B, C, D, E a F měnit s časem, rovněž tak i složky Ω . Tato okolnost vyvolává při výpočtu velké potíže, kterých se lze ale vyvarovat, vztahujeme-li pohyb k soustavě $Ox''y''z''$. Tyto osy jsou nejen vzhledem k vlčku nepohyblivé, takže odpovídající veličiny $A'', B'', C'', D'', E'', F''$ jsou na čas nezávislé, ale jsou to současně jeho hlavní osy setrvačnosti, takže se deviační momenty D'', E'' a F'' stávají nulovými. V důsledku toho lze nyní kinetickou energii psát jako

$$T = \frac{1}{2}(A''\Omega_{x'}^2 + B''\Omega_{y'}^2 + C''\Omega_{z'}^2). \quad (4.29)$$

Konečně, jelikož Oz'' je osou souměrnosti, pak soustavu $Ox'y'z'$ lze rovněž považovat za soustavu hlavních os setrvačnosti vlčku, i když se vzhledem k němu otáčí. Z toho plyne, že

$$T = \frac{1}{2}(A'\Omega_{x'}^2 + A'\Omega_{y'}^2 + C'\Omega_{z'}^2), \quad (4.29')$$

kde $A' = A'' = B'', C' = C''$.

Uvážíme-li rovnost (4.27), lze poslední vztah napsat znova:

$$T = \frac{1}{2}[A'\dot{\Theta}^2 + A'\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + C'(\dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi})^2]. \quad (4.30)$$

(Poznamenejme, že tento výraz udává kinetickou energii pohybu vlčku *vzhledem k nepohyblivé referenční soustavě*, vyjádřené pohybující se soustavou souřadnic. Kinetická energie vlčku *vzhledem k pohybující se referenční soustavě* $Ox'y'z'$ je $\frac{1}{2}C'\dot{\varphi}^2$.)

Potenciální energie vlčku je

$$V = mgh \cos \Theta, \quad (4.31)$$

kde h je vzdálenost těžiště od opory vlčku. Pohyb vlčku lze popsat následující Lagrangeovou funkcí:

$$L = T - V = \frac{1}{2}[A'\dot{\Theta}^2 + A'\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + C'(\dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi})^2] - mgh \cos \Theta. \quad (4.32)$$

Tím je dovršena matematická formulace fyzikálních okolností úlohy. Nyní zbývá odvodit pohybové rovnice podle obvyklých pravidel pro sestavení Lagrangeových rovnic. Parametry Θ , ψ , φ lze pokládat podle jejich vlastností za zobecněné souřadnice, přičemž φ a ψ jsou cyklické. Pohybové rovnice odpovídající cyklickým souřadnicím se integrují bezprostředně, takže

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} &= \text{konst.} = n, \\ A' \dot{\psi} \sin^2 \Theta + C' \cos \Theta (\dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi}) &= A' \dot{\psi} \sin^2 \Theta + C' n \cos \Theta = \text{konst.} = k. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Zbývající pohybová rovnice je:

$$A' \ddot{\Theta} = A' \dot{\psi}^2 \sin \Theta \cos \Theta - C' n \dot{\psi} \sin \Theta + mgh \sin \Theta. \quad (4.34)$$

Pro další řešení je nevyhnutelná znalost počátečních podmínek; tím se zde nebudeme zabývat. Obecná diskuse pohybu je známa svou složitostí, ale díky takto zformulovanému problému se to podařilo s minimálním úsilím. Rovnice (4.33) opět vyjadřují zachování momentu hybnosti, ačkoliv zkoumané složky nejsou fyzikálně tak důležité jako v předešlých případech.

HLAVNÍ KMITY

Některé fyzikální systémy mají ohraničený pohyb, tvořený malými posuny kolem polohy stabilní rovnováhy. Příkladem takového pohybu jsou mechanické kmity atomové mřížky v krystalu. Takovýto pohyb je složitý, ale lze si ho představit jako součet konečného počtu jednoduchých harmonických kmitů. V obecném případě každá složka, tj. jednoduché harmonické kmitání, odpovídá pohybu celé mřížky. Tyto jednoduché složky se nazývají *hlavní* čili *normální kmity* systému.

Prozkoumáme systém vzájemně se ovlivňujících a lineárně kmitajících hmotných bodů. Předpokládáme-li, že pohyb systému má malou amplitudu a děje se v okolí stabilní rovnováhy, lze potenciální energii systému vyjádřit následující Taylorovou řadou:

$$V(q_i) = V(q_i^{(0)}) + \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 + \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \delta q_i \delta q_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 + \dots, \quad (4.35)$$

kde q_i jsou zobecněné souřadnice hmotných bodů, $q_i^{(0)}$ je hodnota těchto souřadnic při rovnováze.

Pro naše potřeby je δq_i důležitější než q_i . Budeme tedy znovu definovat:

$$\delta q_i = \eta_i, \quad (4.36)$$

přičemž η_i nechť jsou zobecněné souřadnice. Jelikož $\partial/\partial q_i \equiv \partial/\partial \eta_i$, výraz (4.35) může být nyní napsán takto:

$$V(\eta_i) = V(0) + \sum_i \eta_i \left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i} \right)_0 + \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \eta_i \eta_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right)_0 + \dots \quad (4.35')$$

Zde $V(0)$ je libovolná konstanta, kterou je možno považovat za nulovou, kromě toho $(\partial V/\partial \eta_i)_0 = 0$, neboť podle předpokladu $\eta_i = 0$ přísluší rovnovážné poloze. Vztah (4.35') tedy přechází na

$$V(\eta_i) = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \eta_i \eta_j V_{ij} + O(\eta^3), \quad (4.35'')$$

kde $V_{ij} \equiv (\partial^2 V / \partial \eta_i \partial \eta_j)$ není závislé na η_i .

V kartézské soustavě souřadnic lze kinetickou energii vyjádřit takto:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2, \quad (4.37)$$

kde m_i je hmotnost jednotlivých hmotných bodů. Přejdeme-li k zobecněným souřadnicím pomocí vztahů

$$q_i = q_i(x_j), \quad \text{nebo} \quad x_j = x_j(q_i), \quad (4.38)$$

kteří *explicitně na čase nezávisí* a použijeme-li dřívějšího výrazu $q_i = q_i^{(0)} + \eta_i$, obdržíme

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j, \quad (4.39)$$

odkud

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \right). \quad (4.40)$$

Uvážíme-li znovu, že amplitudy jsou malé, lze psát, že

$$\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \right)_0 + \sum_k \eta_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_k \partial \eta_j} \right)_0 + \dots, \quad (4.41)$$

takže

$$T = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k + O(\eta \dot{\eta}^2), \quad (4.42)$$

kde

$$M_{jk} \equiv \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \right)_0 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} \right)_0 \quad (4.43)$$

je nezávislé na η_i a t .

Zanedbáme-li dále členy vyššího řádu, můžeme lagrangián tohoto systému (o němž se předpokládá, že je konzervativní) nyní psát:

$$L = T - V = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} (M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - V_{jk} \eta_j \eta_k) \quad (4.44)$$

a rovnice pohybu jsou:

$$\frac{d}{dt} \sum_k M_{jk} \dot{\eta}_k = - \sum_k V_{jk} \eta_k, \quad (4.45)$$

čili

$$\sum_k M_{jk} \ddot{\eta}_k = - \sum_k V_{jk} \eta_k. \quad (4.46)$$

Z toho je vidět vztahy mezi pohybem hmotných bodů. Pokládáme-li nyní pohyb za periodický, tj.

$$\eta_k = \eta_k^{(0)} e^{i\omega t} \quad (4.47)$$

a dosadíme-li do (4.46), dostaneme

$$\sum_k (\omega^2 M_{jk} - V_{jk}) \eta_k^{(0)} = 0, \quad (4.48)$$

což je soustava $3N$ rovnic spojujících $3N$ veličin $\eta_k^{(0)}$. Podmínkou existence netriviálního řešení této soustavy je

$$|\omega^2 M_{jk} - V_{jk}| = 0, \quad (4.49)$$

kde levá část představuje determinant, jehož (j, k) -tý element je $(\omega^2 M_{jk} - V_{jk})$.

Řešení této charakteristické rovnice dává $3N$ hodnot ω^2 , odpovídajících $3N$ frekvencím hlavních kmitů systému. Tato $3N$ řešení jsou nezávislá a obecný pohyb systému je popisován libovolnou lineární kombinací těchto řešení. Je nutné zdůraznit, že jednotlivé formy pohybu nejsou zpravidla s jednotlivými hmotnými body spojeny. V obecném případě pohyb každého hmotného bodu zahrnuje v sobě každou z hlavních frekvencí. Některé hodnoty ω^2 mohou být záporné, takže ω je ryze imaginární a představuje tak nestabilní složku pohybu. Na takové aperiodické složky lze mnohdy pohlížet jako na formy kmitů v obecném smyslu, ač jejich existence ve skutečnosti odporuje dříve vysloveným předpokladům o tom, že systém se pohybuje v okolí polohy stabilní rovnováhy.

Zahrnutí členů vyšších řádů do lagrangiánu (4.44) vyžaduje, přísně vzato, vyloučit možnost rozkladu pohybu na nezávislé složky. Určení takového zobecněného *anharmonického* pohybu je velmi nesnadnou úlohou. Avšak obvykle takové členy vyššího řádu lze vyšetřovat jako efekty druhého řádu, podmíněné vzájemným ovlivněním mezi normálními kmity. Takto si lze znovu představit obecný pohyb systému jako lineární kombinaci $3N$ harmonických členů s libovolnými koeficienty na počátku pohybu. Vlivem vzájemného působení se budou tyto koeficienty měnit s časem a tyto změny budou pak určeny „anharmonickými“ členy vyšších řádů.

Všeobecné zvláštnosti úlohy určení hlavních kmitů se dobře objasňují na prostém klasickém modelu, který dává dobrou představu o chování lineární tříatomové molekuly. V tomto modelu hmotný bod hmotnosti M je pružně spojen s druhými dvěma hmotnými body o stejných hmotnostech m . Konstanta pružnosti je μ a platí pro obě spojení. Při rovnováze leží body v přímce a jsou od sebe stejně vzdáleny. Budeme uvažovat jenom přímočarý pohyb.

Označíme-li posunutí hmotných bodů z rovnováhy jako η_1, η_2, η_3 , kinetická energie bude dána výrazem:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2} M \dot{\eta}_2^2, \quad (4.50)$$

dále pak

$$V = \frac{1}{2} \mu (\eta_3 - \eta_2)^2 + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2, \quad (4.51)$$

takže

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2} M \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2} \mu (\eta_3 - \eta_2)^2 - \frac{1}{2} \mu (\eta_2 - \eta_1)^2. \quad (4.52)$$

Pohybové rovnice jsou:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 &= \mu(\eta_2 - \eta_1), \\ M\ddot{\eta}_2 &= \mu(\eta_3 - \eta_2) - \mu(\eta_2 - \eta_1) = \mu(\eta_3 + \eta_1 - 2\eta_2), \\ m\ddot{\eta}_3 &= -\mu(\eta_3 - \eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Předpoklad, že jde o jednoduchý harmonický pohyb, dává

$$\left. \begin{aligned} (m\omega^2 - \mu)\eta_1^0 + \mu\eta_2^0 &= 0, \\ (M\omega^2 - 2\mu)\eta_2^0 + \mu(\eta_3^0 + \eta_1^0) &= 0, \\ (m\omega^2 - \mu)\eta_3^0 + \mu\eta_2^0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

takže charakteristická rovnice je:

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 - \mu, & \mu, & 0 \\ \mu, & M\omega^2 - 2\mu, & \mu \\ 0, & \mu, & m\omega^2 - \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (4.55)$$

Řešením této rovnice plyne

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^2 = \mu/m, \quad \omega^2 = \frac{\mu(2m + M)}{mM}. \quad (4.56)$$

Hlavní frekvence pak jsou:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \pm\sqrt{\mu/m}, \quad \omega_3 = \pm\sqrt{\frac{\mu(2m + M)}{mM}}. \quad (4.57)$$

Jako při Fourierově rozkladu ani zde nejsou záporné frekvence. Přijaté řešení mělo exponenciální formu; dvojice takových řešení se stejnými a opačnými hodnotami ω dává řešení s kosinem nebo sinem s libovolnými dvěma konstantami jako libovolnými hodnotami amplitudy a fáze.

Řešení $\omega_1 = 0$ odpovídá fyzikálně možnému případu, v kterém tři hmotné body současně prodělávají stejný postupný pohyb. Řešení $\omega_2 = \sqrt{\mu/m}$ dává $\eta_2^0 = 0$ a $\eta_1^0 = -\eta_3^0$, což odpovídá pohybu, při kterém se prostřední bod nepohybuje, vnější dva se pak pohybují navzájem opačně. Třetí řešení popisuje pohyb, při kterém se vnější body pohybují souhlasně, ale opačně než prostřední bod.

Tak jako v obecném případě je možné určit explicitní podobu transformace $\eta'_i = \eta'_i(\eta_j)$ k nové souřadné soustavě, ve které jakákoliv forma kmitání bude spojena pouze s jednou souřadnicí. Může se zde předpokládat, že fyzikálně důležité informace jsou dány hlavními kmitů, takže nebudeme potřebnou transformaci hledat. Obyčejně to postačuje, ač se někdy musí úloha vyřešit celá.

Předešlé výklady ilustrují použití Lagrangeovy metody při obecném zkoumání úlohy malých kmitů. Řešení charakteristické rovnice systému, který má velký počet stupňů volnosti (jako u krystalové mřížky), může být velmi obtížné, ale horní metody může být vždy použito jako výchozí.

ELEKTRICKÉ OBVODY

Použití Lagrangeovy formulace na řešení elektrických obvodů je zajímavé, ač postrádá širšího praktického uplatnění. Uvažujme Lagrangeovu funkci:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} \dot{I}_i \dot{I}_j + \sum_i \dot{E}_i I_i - \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{C_i} I_i^2, \quad (4.58)$$

kde $L_{ij} = L_{ji} = \text{konst.}$

Odpovídající pohybová rovnice bude:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j L_{ij} \dot{I}_j \right) = \dot{E}_i - I_i / C_i,$$

nebo

$$\dot{E}_i = I_i / C_i + \sum_j L_{ij} \ddot{I}_j. \quad (4.59)$$

Jestliže na $L_{ij} (i \neq j)$ pohlížíme jako na vzájemné indukance, na $L_{ij} (i = j)$ jako na samoindukce a na C_i jako na kapacity, tu uvedené rovnice platí pro elektrické obvody s reaktivními impedancemi, kterými protékají proudy I_i , vyvolané elektromotorickými silami E_i . Je jasné, že takové úlohy lze formulovat analyticky při použití Lagrangeovy funkce (4.58), kde jsou proudy ve větvích sítě brány jako zobecněné souřadnice. (Ohmické odpory mohou být do tohoto formalismu zahrnuty při použití Rayleighovy disipační funkce.)

Analogie mezi mechanickými a elektrickými systémy se obvykle projevuje ve shodné podobě pohybových rovnic.*) To je velmi důležité. Metod, rozpracovaných pro řešení úloh týkajících se speciálně elektrických obvodů, se často používá k řešení ekvivalentních mechanických problémů. Obrácený postup se vyskytuje řidčeji, neboť v minulosti bylo na řešení elektrických systémů vynaloženo větší úsilí. Podoba v Lagrangeově formalismu jenom vyjadřuje analogii mezi pohybovými rovnicemi a je nepravděpodobné, že by to samo o sobě mohlo vést k dalším výsledkům. Vzato povšechně, výhoda Lagrangeovy formulace spočívá v poskytnutí výhodné metody k odvození pohybových rovnic, což jen podtrhuje potíže při studiu elektrických obvodů.

*) Viz např. *L. Brillouin, „Wave Propagation in Periodic Structures,“* Dover Publications Inc., 1953.

ZOBECNĚNÉ HYBNOSTI

Při použití Lagrangeovy metody bylo jasné, že existenci cyklických souřadnic podmiňuje neproměnnost veličin, které lze mnohdy na základě předběžných úvah ztotožnit se složkami hybnosti. Nicméně se musí zvláště zdůraznit, že explicitní vyjádření hybnosti se nikde v Lagrangeově pojetí nevyskytuje. Podstatným rysem tohoto formalismu je, že nezávislými proměnnými jsou čas a zobecněné souřadnice. Časové derivace zobecněných souřadnic jsou zde rovněž explicitně vyjádřeny, nakonec jsou ale vždy závisle proměnnými. Tato skutečnost je vyjádřena pojetím dráhy v konfiguračním prostoru pro představu pohybu systému.

V souvislosti s užitím zobecněných souřadnic je možné zavedení zobecněných hybností. Její využití je ale mimo Lagrangeovo schéma a přivádí nás k novému způsobu popisu pohybu, který se obvykle spojuje s Hamiltonovým jménem.

Složka zobecněné hybnosti je definována jako

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.1)$$

takže je jedna složka zobecněné hybnosti pro každou zobecněnou souřadnici. Dvojice q_i, p_i tak tvoří dvojici *sdrúžených* proměnných. Ještě ale nemáme pro takové tvrzení oprávnění, nebereme-li v úvahu poznámku, že v případě konzervativního systému nás to vede k takovým veličinám, jako jsou složky hybnosti a momentu hybnosti. Na druhé straně další definice $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ vede k témuž výsledku. Skutečné oprávnění námi zvolené definice spočívá v logičnosti a životaschopnosti právě na této definici založené teorie.

V případě nekonzervativního systému může tato obecná definice zahrnovat veličiny, které obvykle nelze považovat za hybnosti. Uvažujme nabitý hmotný bod, pohybující se v elektromagnetickém poli. Je to příklad nekonzervativního systému, který může být popsán Lagrangeovou metodou. Jak jsme již vysvětlili v kap. III, Lagrangeova funkce jest:

$$L = T - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (5.2)$$

Z definice (5.1) složky hybnosti v kartézské soustavě jsou:

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i. \quad (5.3)$$

Zde kromě členů $m\dot{x}_i$ je další člen eA_i/c , který lze nazvat *elektromagnetickou hybností*.

Podle definice (5.1) Lagrangeovy rovnice nabývají tvaru:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i; \quad (5.4)$$

mají tedy určitou podobu s prvotní Newtonovou formou pohybových rovnic.

CYKlickÉ SOUŘADNICE

Definice složek zobecněných hybností vede k následujícím závěrům: jestliže

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (5.5)$$

potom

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst}, \quad (5.6)$$

čili

$$p_i = \text{konst} \quad (5.6')$$

Cyklické souřadnice takto vždy v sobě zahrnují neproměnnost odpovídajících složek hybností. Neproměnnost hybnosti a momentu hybnosti v konzervativním systému se jeví jako zvláštní případ tohoto obecného pravidla. Při úvahách o Larmorově teorému bylo nalezeno, že výsledkem působení magnetického pole na jednoatomový systém byla obecná precese systému kolem směru tohoto pole. Lze to říci i jinak. Zobecněná hybnost sdružená s úhlovou souřadnicí Θ se při působení pole zachovává, přičemž zvětšení elektromagnetické hybnosti je vyváжено zmenšením její mechanické části.

FÁZOVÝ PROSTOR

Zavedení zobecněných hybností mění zcela naše nazírání. Jak bylo řečeno dříve, z hlediska Lagrangeovy metody pohlížíme na souřadnice systému jako na nezávislé veličiny určující jeho polohu. Závislost každé z těchto proměnných na čase je dána řešením soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu, známých jako Lagrangeovy rovnice. Druhý přístup se vyznačuje tím, že za nezávislé veličiny se považují jak souřadnice, tak hybnosti. Potom konečným cílem kterékoliv úlohy je nalezení všech těchto veličin jako explicitních funkcí času.

Přednost této metody není hned jasná. Např. při řešení kterékoliv úlohy z kap. IV by nijak nepomohlo, kdyby na místo $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ byl vzat symbol p_i . Může být ale vypracována metoda na řešení pohybových rovnic pozměněného tvaru, které lze při tomto novém přístupu obdržet, jež má občas velkou výhodu před řešením Lagrangeových rovnic (viz kap. VII). Avšak to se pravděpodobně často nevyskytuje a musíme připustit, že znalost lagrangiánu je dostatečná pro vyřešení obyčejných úloh z mechaniky.

Skutečná přednost nové metody spočívá v tom, že poskytuje vhodný základ pro rozvoj kvantové mechaniky a statistické mechaniky. V této knize bude řeč toliko o kvantové mechanice, takže v následujícím výkladu se bude mnohé jevit jako namáhavá předběžná práce, nevyhnutelná pro pochopení metod používaných u obou disciplín.

Konfigurační prostor byl zaveden jako popisná soustava pro zobrazení pohybu systému při využití Lagrangeovy metody. Tato metoda nebude vždy dostatečná, zvláště budou-li

v souboru nezávislých veličin složky zobecněných hybností a prostorové souřadnice. Namísto toho si lze představit, že vývoj pohybu systému je znázorněn trajektorií ve *fázovém prostoru* o $6N$ rozměrech; každá prostorová souřadnice a každá složka hybnosti hmotného bodu vytváří vždy jeden rozměr fázového prostoru. Jak jsme už poznamenali v souvislosti s konfiguračním prostorem, geometrická terminologie je pouze ilustrativní; jakékoliv těžkosti v jejím chápání lze odstranit, nahradíme-li slovo „rozměr“ slovem „proměnná“.

Mnoho teoretických potíží vyvstává při pokusu spojit představy o konfiguračním a fázovém prostoru. V této otázce lze dospět k určitému vyjasnění, uvážíme-li, že trajektorie v konfiguračním prostoru je podstatně libovolnější než ve fázovém prostoru. Určení vzhledu Lagrangeovy funkce (což je ekvivalentní ustavení pohybových rovnic) je výchozím bodem v obou případech, neurčuje se tím však trajektorie. Jestliže je vedle Lagrangeovy funkce udán ve fázovém prostoru jeden bod, tu je v tomto prostoru určena celá trajektorie, neboť při jeho zadání se ve skutečnosti zadává šest počátečních hodnot souřadnic každého hmotného bodu. Na druhé straně jednotlivý bod v konfiguračním poskytuje pouze tři počáteční hodnoty pro každý hmotný bod a je nutné udat další veličiny, aby byla trajektorie určena. Jinak řečeno, jsou-li pohybové rovnice stanoveny, prochází v konfiguračním prostoru libovolným bodem nekonečný počet trajektorií, kdežto ve fázovém prostoru je možná pouze jediná trajektorie.

HAMILTONOVA FUNKCE

Lagrangeova funkce závisí obecně na q_i , $\dot{q}_i$ a t . Její totální derivace podle času tedy je:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Použijeme-li Lagrangeovy pohybové rovnice (3.13), máme

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (5.8)$$

čili

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.8')$$

Jestliže $\partial L / \partial t = 0$, potom

$$\left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] = \text{konst.} \quad (5.9)$$

a při uvážení (5.1)

$$\left[\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right] = \text{konst.} \quad (5.9')$$

Zavedeme nyní novou funkci H , kterou budeme nazývat *Hamiltonovou funkcí*, definicí

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (5.10)$$

kteřá je podobná L a má rozměr energie. Závažnost *hamiltoniánu* H je mimo jiné zřejmá i z právě odvozeného, kdy se tato funkce při pohybu, při kterém lagrangián není explicitně

závislý na čase, nemění. Dále ukážeme, že ve většině fyzikálně zajímavých případů je H totožné s celkovou energií systému.

Jiný význam Hamiltonovy funkce je možno objasnit podle následujících úvah. Pro některé účely je výhodnější použít analytické mechaniky při proměnných q_i, p_i a t , nikoliv při $q_i, \dot{q}_i, t$. Obdobná situace se vyskytuje v termodynamice, kde při přechodu od entropie S a objemu V k teplotě T a V jako k nezávislým proměnným zavádíme novou energetickou funkci F (volnou energii podle Helmholtze) na místo předešlé funkce U (vnitřní energie) vztahem

$$F = U - TS.$$

Funkce F je závislá na T a V , kdežto U bylo závislé na S a V . Může to sloužit za příklad Legendrovy transformace. Definice (5.10) je jiným příkladem této transformace. Plyne z něho, že obecně je Hamiltonova funkce závislá na souřadnicích, hybnostech a času, tj.

$$H = H(q_i, p_i, t). \quad (5.11)$$

Z (5.10) a z definice lagrangiánu plyne, že H se jeví funkcí $q_i, \dot{q}_i$ a t . Avšak je zřejmé, že z rovnic (5.1) je nutno vypočítat $\dot{q}_i$ za pomoci q_i, p_i a t a výsledek dosadit do (5.10), aby byla hledaná funkcionální závislost získána.

Jiná forma pohybových rovnic může být odvozena za použití Hamiltonovy funkce. Z (5.11) plyne, že

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (5.12)$$

z (5.10) pak

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - dL. \quad (5.13)$$

Jelikož $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, je

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

a při (5.1) pak

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.14)$$

Dosadíme-li do (5.13) z (5.14), při použití (5.4) je:

$$dH = - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.15)$$

Srovnáním koeficientů v rovnicích (5.12) a (5.15) nyní dostáváme:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.17)$$

Rovnice (5.16) se nazývají *kanonické pohybové rovnice* nebo *Hamiltonovy rovnice*. Tyto rovnice jsou pokrokem ve formulaci problému, neboť na rozdíl od Lagrangeových rovnic, které jsou druhého řádu, jsou tyto diferenciální rovnice prvního řádu. V praxi je tento zisk značně

problematický. Jednodušší podmínky pro pohodlnější integraci kterékoliv z uvedených rovnic nastanou, není-li H explicitní funkcí některého q_i nebo některého p_i ; potom odpovídající sdružená proměnná je konstantou pohybu. Řešení rovnic se tak redukuje na problém určení souřadné soustavy, ve které by q_i a p_i byly v dostatečném počtu cyklické. Lze to učinit podle některých pravidel (viz Hamiltonovu-Jacobiho metodu vyloženou v kap. VII). Na neštěstí tato pravidla zahrnují ale řešení rovnic s parciálními derivacemi prvního řádu, které mohou patřit k velmi těžko řešitelným. V jistých případech se to povede, avšak hlavní význam Hamiltonova formalismu, jak už bylo řečeno, spočívá v tom, že je výkonným základem pro kvantovou a statistickou mechaniku.

FYZIKÁLNÍ VÝZNAM HAMILTONIÁNU

Při prvním setkání a použití Hamiltonova formalismu vzniká dojem, že Hamiltonova funkce je neužitečným synonymem pro celkovou energii systému. Jak jsme už dříve poznamenali, tato funkce, podobně jako Lagrangeova funkce, má rozměr energie a ve velkém počtu prakticky důležitých případů opravdu vyjadřuje celkovou energii; tím se ale ani zdaleka nemíní, že H bude vždycky totožná s touto veličinou. Prozkoumáme nyní podmínky, které je nutné pro uvedenou shodu vyplnit. Podle definice pro konzervativní systém $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$, takže

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}; \quad (5.18)$$

dále

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2. \quad (5.19)$$

V obecném případě

$$x_i = x_i(q_j, t), \quad (5.20)$$

takže

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (5.21)$$

a z toho

$$T = \sum_j \sum_k a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c, \quad (5.22)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} a_{jk} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \\ b_j &= \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Z toho plyne, že T je homogenní kvadratická forma pro zobecněné rychlosti, jestliže (5.20) neobsahuje explicitně čas t . Přitom tedy

$$T = \sum_j \sum_k a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; \quad (5.24)$$

lze snadno dokázat,^{*)} že

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \quad (5.25)$$

V tomto případě je

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = T + V = E \quad (= \text{celková energie}). \quad (5.26)$$

Poznamenejme, že jsme zavedli následující omezení: a) systém je konzervativní, b) transformace souřadnic nezávisí na čase, tj. osy souřadnic jsou v prostoru pevné. Tyto podmínky jsou dostatečné, ale nikoliv pro rovnost H a E nutné. Jiným případem, kdy tyto závěry také platí, je pohyb nabitě částice (hmotného bodu) v neproměnném elektromagnetickém poli. Pro takový systém bylo dříve nalezeno, že

$$L = T - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right), \quad (5.2)$$

$$p_i = m \dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i. \quad (5.3)$$

Z toho

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (5.27)$$

a

$$H = T + e\varphi. \quad (5.28)$$

Poslední veličinu lze rovněž ztotožnit s celkovou energií systému, jestliže křivočarý integrál ze síly a dráhy hmotného bodu je vypočítán podle kap. II. V tomto případě rovnost veličin H a E nastává částečně díky nahodilému, jak se zdá, zrušení členů vztahujících se k vektorovému potenciálu. Lze dále postřehnout, že ty členy potenciálu, které jsou v lagrangiánu a závisí na rychlosti, jsou lineární homogenní funkcí složek rychlosti. Jestliže tyto členy označíme jako $L^{(v)}$, tu z Eulerovy věty plyne, že $\sum_i \dot{x}_i (\partial L^{(v)} / \partial \dot{x}_i) - L^{(v)} = 0$. Jestliže

je H celkovou energií, nemusí obsahovat $L^{(v)}$, protože síly odpovídající složkám potenciálu závislým na rychlosti nekonají při pohybu systému práci. Vůbec je zde možné připustit, že veličiny H a E jsou totožné, třebaže se soustava souřadnic vzhledem k nepohyblivé referenční soustavě pohybuje. Je ostatně nutné si uvědomit jednu hlavní přednost hamiltoniánu, že totiž poskytuje takovou metodu určení energie, při které, jak je to v celé Lagrangeově a Hamiltonově teorii, se nevyžaduje stanovení jednotlivých složek síly.

Zvláštní věcí je neproměnnost H v čase. Jelikož $H = H(p_i, q_i, t)$, plyne z toho, že u kanonických rovnic (5.16) máme

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.29)$$

Z podobnosti tohoto výsledku s druhou rovnicí (5.16) vyplývá, že H má analogickou závislost na $-t$ jako p_i na q_i , z čehož dále plyne, že H a $-t$ lze považovat za sdružené proměnné. Analogie mezi (5.29) a první rovnicí (5.16) nás přivádí k dalšímu porovnání, které ale není potvrzeno úvahami teorie relativity (viz kap. X.).

^{*)} Tento výsledek je speciálním případem Eulerovy věty, který tvrdí, že $\sum_i x_i (\partial f / \partial x_i) = n f$, jestliže f je homogenní funkcí n -tého stupně vzhledem k x_i .

Vztahy (5.17) a (5.29) dávají

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.30)$$

Podmínkou, aby H bylo prvním integrálem pohybu, je, že L neobsahuje explicitně t . Tato podmínka je nutná i postačující.

Nejzajímavější jsou systémy, u nichž je celková energie konstantou pohybu. Tento předpoklad vyžaduje současné splnění podmínek $E = H$ a $H = \text{konst}$, ale toto opět není nutným požadavkem, jak plyne z následujícího příkladu.

Uvažujme „spícího vlčka“ bez tření (otáčí se kolem vertikální osy souměrnosti). Je to příklad systému s konstantním E . Užijeme-li označení z příkladu v kap. IV., je

$$T = \frac{1}{2}c\dot{\varphi}^2, \quad V = mgh,$$

takže

$$L = T - V = \frac{1}{2}c\dot{\varphi}^2 - mgh.$$

Transformujeme k nové proměnné α pomocí $\alpha = \varphi - \omega_0 t$, dostaneme

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} - \omega_0, \quad L = \frac{1}{2}c(\dot{\alpha} + \omega_0)^2 - mgh, \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = c(\dot{\alpha} + \omega_0);$$

z toho

$$H = p_\alpha \dot{\alpha} - L = \frac{p_\alpha^2}{2c} - \omega_0 p_\alpha + mgh,$$

protože

$$E = T + V = \frac{p_\alpha^2}{2c} + mgh \neq H.$$

Tento příklad je poněkud triviální, ale posloužil k objasnění toho, že H a E jsou integrály pohybu, aniž by byly totožné.

Zde nečekaná vlastnost veličiny H vyplývá z použité soustavy souřadnic, která se vzhledem k nepohyblivé referenční soustavě otáčí. H nemůže být ztotožněno s E ani vzhledem k nepohyblivé, ani vzhledem k pohyblivé soustavě souřadnic.

INTEGRÁLY POHYBU A SYMETRIE

V předešlém výkladu byly uvedeny podmínky, při kterých Hamiltonova funkce a zobecněné hybnosti jsou během pohybu systému konstantní. Z jednoho hlediska je neproměnnost hybnosti důsledkem toho, že souřadnice jsou cyklické, přičemž je zde velmi výhodné, že odpovídající pohybové rovnice (Lagrangeovy nebo Hamiltonovy) lze naráz integrovat. Z druhého hlediska tato neproměnnost je sama o sobě velmi důležitou vlastností systému. Toto hledisko je velmi rozšířeno v nejvýznamnějších použitích vykládané metody v současné fyzice; přijatelné řešení úlohy může spočívat v určení všech integrálů pohybu. V obecném smyslu termínu *integrál pohybu* lze použít na libovolnou dynamickou proměnnou, nejen na hamiltonián a na hybnosti. Způsob určení těchto integrálů představuje v obecném případě důležitou součást dalšího výkladu (viz kap. VIII).

Je-li některá kartézská souřadnice cyklická, potom Hamiltonova a Lagrangeova funkce jsou invariantní k posunutí systému podél odpovídající osy. Přítomnost cyklické úhlové

souřadnice analogicky podmiňuje invariantnost odpovídající hybnosti, plyne z toho, že integrály pohybu jsou spojeny se symetrickými vlastnostmi systému. V důsledku (5.29) existuje analogicky symetrický vztah mezi hamiltoniánem a časovou souřadnicí. Obecně vlastnosti zachování a symetrie jsou tak spojené, že jsou tyto termíny téměř zaměnitelné.

DISIPAČNÍ SYSTÉMY

V kap. III jsme ukázali, že disipační systémy mohou být do poněkud změněného Lagrangeova popisu zahrnuty zavedením nové funkce, tj. Rayleighovy disipační funkce, která se k samotné Lagrangeově funkci přidává.

Tato nová funkce byla definována jako

$$R = \frac{1}{2} \sum_j k_j \dot{x}_j^2, \quad (3.29)$$

při čemž změněné pohybové rovnice v zobecněných souřadnicích byly:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3.31)$$

Takový popis nevede v Hamiltonově teorii k užitečným závěrům, jelikož energie systému není konstantní a nijak nemůže být z hamiltoniánu určena. Je však znám jiný způsob, který dovoluje tuto obtíž překonat. Jeho základní myšlenka je v rozšíření zkoumaného disipačního systému zahrnutím nového, vhodného hypotetického systému, v kterém se rozptylovaná energie pohlcuje. Jde o ryze matematický přístup, který však poskytuje složený systém, v němž se celková energie zachovává. Za příklad vezměme obyčejný lineární harmonický oscilátor s tlumením, jehož pohybová rovnice je:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + \mu x = 0, \quad (5.31)$$

kde k je koeficient tlumení.

Pohybová rovnice doplňujícího systému (čili „zrcadlového zobrazení“) je následující:

$$m\ddot{x}' - k\dot{x}' + \mu x' = 0. \quad (5.32)$$

Uvažujme funkci

$$L = m(\dot{x}\dot{x}') - \frac{1}{2}k(x'\dot{x} - \dot{x}'x) - \mu xx' - E_0, \quad (5.33)$$

kde E_0 je počáteční energie, vypočitatelná z přijatých počátečních podmínek.

Za funkci L lze považovat Lagrangeovu funkci složeného systému s proměnnými x a x' , jelikož rovnice (5.31) a (5.32) lze obdržet z lagrangianu (5.33) obvyklým způsobem.

Odpovídajícími zobecněnými hybnostmi jsou:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}' - \frac{1}{2}kx', \\ p' &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x} + \frac{1}{2}kx, \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Hamiltonova funkce je pak:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = m\dot{x}\dot{x}' + \mu xx' + E_0, \quad (5.35a)$$

čili

$$H = \frac{1}{m} \left(p + \frac{1}{2} k x' \right) \left(p' - \frac{1}{2} k x \right) + \mu x x' + E_0. \quad (5.35b)$$

Jelikož $\partial H / \partial t = 0$, je $H = \text{konst.}$ Plyne to rovněž z řešení pohybových rovnic

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 e^{i\omega t} e^{-\alpha t}, \\ x' &= x'_0 e^{i\omega t} e^{+\alpha t}, \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}, \quad \alpha = \frac{k}{2m}.$$

Dosazení těchto veličin do (5.35a) poskytuje $H = E$, což potvrzuje totožnost hamiltoniánu s celkovou energií. V případě systému tvořeného jednotlivými body použití tohoto matematického aparátu není jasné, lze ho ale použít ke studiu spojitých prostředí. Poznamenejme ještě, že při tomto novém přístupu sdružené proměnné p a p' ztratily jakýkoliv fyzikální význam.

vi. VARIČNÍ PRINCIPY

Ve fyzice byly navrženy mnohé variační principy. V některých případech byly zahaleny do filosofického mysticismu, který pozdržel ocenění jejich významu. Hlavní význam takovýchto principů tkví v mimořádné ekonomičnosti jejich vyjádření. V této kapitole bude podrobně rozebrán jen Hamiltonův princip a pouze krátký nástin principu nejmenší akce.

VARIČNÍ POČET

Především probereme čistě matematickou stránku určení podmínek, za kterých má jistý typ integrálu stacionární (extremální) hodnotu.

Uvažujme integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx, \quad (6.1)$$

kde $y' = \frac{dy}{dx}$; x je nezávislá proměnná a y závislá proměnná, přičemž tvar závislosti y na x není zpočátku stanoven. Hodnoty x a y jsou na okrajích integrační cesty udány a veličina I přesně na této integrační cestě mezi dvěma krajními body závisí. Máme nyní určit podmínky, při kterých má I stacionární hodnotu.

Nechť je křivka APB na obr. 3 onou integrační cestou, pro kterou má I extrém. Povšimneme si sousední křivky $AP'B$ s týmiž koncovými body A a B . Přiřazení mezi body těchto dvou drah je takové, že $P \rightarrow P'$, kde $P = (x, y)$ a $P' = (x, y + \delta y)$; tj. úsečky x bodů se nemění. Toto určuje tzv. δ -variace dráhy. S výjimkou jediného omezení

$$\delta y_1 = \delta y_2 = 0 \quad (6.2)$$

je tato variace libovolná, ale malá. Může být vyjádřena jinak, tj.

$$\delta y = \eta \delta \alpha, \quad (6.3)$$

kde α je společný parametr pro všechny body čáry, η je libovolná funkce x , splňující podmínku

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (6.2')$$

Odpovídající variace y' je

$$\delta y' = \eta \delta \alpha. \quad (6.4)$$

Jelikož tato variace je podle podmínky malá, lze v integrandu, rozvedeném u funkce F do Taylorovy řady, uvážit jen členy prvního řádu. Integrál podle variované integrační cesty

lze pak psát jako

$$I' = \int_{x_1}^{x_2} \left(F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \eta \delta \alpha + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \delta \alpha \right) dx,$$

z čehož

$$\delta I = \delta \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx; \quad (6.5)$$

po integraci per partes a při uvážení (6.2') je:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx,$$

takže konečně

$$\delta I = \delta \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta dx. \quad (6.6)$$

Podmínka stacionárnosti I požaduje, aby variace δI byla nulová. Jelikož funkce η je libovolná, musí pro tuto podmínku být integrand (6.6) nulový, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (6.7)$$

Poslední výsledek lze lehko zobecnit na případ n závisle proměnných y_i . Obdrží se n podmínek ve tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Jestliže n závisle proměnných y_i je funkcemi m nezávisle proměnných x_r bude těchto n podmínek :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{r=1}^m \frac{d}{dx_r} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_{i,r}} \right) = 0, \quad (6.9)$$

kde $y'_{i,r} \equiv \frac{dy_i}{dx_r}$. Matematická formulace principu v tomto případě má tvar

$$\delta \int \dots \int F dx_1 dx_2 \dots dx_m = 0. \quad (6.10)$$

Tento výsledek lze dále zobecnit při předpokladu, že funkce F je závislá také na derivacích y_i vyššího řádu; zde to nebudeme ale zkoumat.

Předložených vzorců lze použít v širokém okruhu fyzikálních úloh. Téměř ve všech případech je stacionární hodnota integrálu minimem, někdy však jde o maximum. Poprvé byl tento princip použit Bernoullim pro určení dráhy, k jejímuž proběhnutí potřeboval hmotný bod účinkem své váhy mezi dvěma místy neležícími pod sebou minimální dobu.

V horním odvození bylo dokázáno, že podmínky (6.7) až (6.9) vzniknou z předpokladu o nulové variaci příslušného integrálu. Jsou to nutné podmínky; ukážeme, že jsou i postačující. Jsou-li splněny, pak je variace příslušného integrálu nulová.

Podařilo se dokázat, že pohybové rovnice systému, popisovaného Lagrangeovou funkcí, jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.13)$$

Podle předcházejícího článku to však znamená, že

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0, \quad (6.11)$$

což je formulace *Hamiltonova principu*. Z našeho způsobu výkladu vyplývá, že tento princip plyne z Newtonových zákonů. Z jiného hlediska lze však na tento výsledek pohlížet jako na výchozí princip, z kterého potom Lagrangeovy rovnice a další zákony mechaniky prostě vyplývají.

Je třeba zvláště zdůraznit, že Hamiltonův princip další informace k těm, které už známe nepřidává. Poskytuje toliko na rozdíl od jiných postulátů na výsost elegantní a stručnou formulaci pohybových zákonů. Jeho výhoda spočívá mimo jiné i v tom, že ho lze použít i k nemechanickým systémům, na které nelze např. Newtonovy zákony aplikovat. V dalších kapitolách bude tato velká obecnost Hamiltonova principu, která jej zařadila mezi základní postuláty, ještě podrobně rozebrána.

Integrál

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (6.12)$$

u kterého integrace probíhá podle skutečné dráhy systému, je znám jako *Hamiltonova principální (akční) funkce*. K jejímu určení je nutné znát jak tuto dráhu, tak Lagrangeovu funkci. Variační princip umožňuje nalézt dráhu, ale je věru nevyhnutelné postulovat analytický tvar funkce L . V tomto směru je Hamiltonův princip poněkud umělý. Jeho použití při nových okolnostech je podmíněno tím, že Lagrangeova funkce je velmi často skutečně jednoduchou funkcí možných proměnných.

UPRAVENÝ HAMILTONŮV PRINCIP

V kap. V. jsme dokázali, že Lagrangeovy pohybové rovnice lze zaměnit soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu, tj. Hamiltonovými kanonickými rovnicemi. Jejich ekvivalence je potvrzována i tím, že tyto Hamiltonovy rovnice lze podobně jako rovnice Lagrangeovy z Hamiltonova poněkud upraveného principu odvodit.

Z (5.10) je

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H,$$

kde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (5.1)$$

Upravený Hamiltonův princip potom je:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right] dt = 0. \quad (6.13)$$

V (6.11) byly při variaci dráhy uvažovány variace q_i při neproměnném t (???), přičemž variace $\dot{q}_i$ závisely na variacích q_i . V tomto případě v souladu s obecným předpokladem o použití Hamiltonovy funkce δ -variace obsahuje nezávislé variace proměnných jak q_i , tak p_i při neproměnném t . Tyto variace lze vyjádřit jako už dříve pomocí parametru α , který je společný všem bodům integrační cesty (jde nyní o dráhu ve fázovém prostoru, nikoliv v konfiguračním prostoru), tj.

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \delta \alpha = \eta_i \delta \alpha, \quad \delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \delta \alpha = \zeta_i \delta \alpha, \quad (6.14)$$

kde η_i a ζ_i jsou libovolné veličiny, vyhovující podmínkám

$$\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_2) = 0. \quad (6.14')$$

Variace integrálu je tak ve tvaru

$$\delta S = \delta \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right] dt. \quad (6.15)$$

Integraci po částech a při využití (6.14) a (6.14') dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \eta_i dt. \quad (6.16)$$

Z rovností (6.15) a (6.16) plyne, že

$$\delta S = \delta \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \zeta_i - \left(\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \eta_i \right] dt. \quad (6.17)$$

Funkce η_i a ζ_i jsou libovolné a nezávislé, takže vymizení variace S je možné jen tehdy, budou-li koeficienty u těchto funkcí nulové, tj.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6.18)$$

Tyto rovnice jsou shodné s (5.16), tj. s kanonickými pohybovými rovnicemi.

NEHOLONOMNÍ SYSTÉMY

Předešlé výrazy byly odvozeny za předpokladu, že všechny zobecněné souřadnice q_i jsou nezávislé. Z toho ovšem plynulo, že případné vazby v systému jsou holonomní, takže souřadnice byly voleny podle stupňů volnosti, čímž už byly vazby uvaženy.

Pohybové rovnice ohraňované třídy neholonomních systémů lze také obdržet *Lagrangeovou metodou neurčitých součinitelů*. Uvedená třída zahrnuje systémy, v kterých jsou vazbové podmínky dány formou neintegrovatelných diferenciálních vztahů obsahujících prostorové a časové souřadnice.

Uvažujme takový systém, ve kterém jsou vazbové podmínky dány m rovnicemi ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^n a_{ri} dq_i + b_{ri} dt = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad 6.19$$

kde počet zobecněných souřadnic je n a počet stupňů volnosti je $(n - m)$. Veličiny a_{ri} a b_{ri} jsou obecně funkcemi t a q_i .

Předpokládá se, že existuje taková Lagrangeova funkce L závislá na t , na všech n souřadnicích q_i a na jejich derivacích podle času, že při pohybu systému splňuje podmínku

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Tento předpoklad o platnosti Hamiltonova principu může být, jako už dříve, zapsán v podobě:

$$\delta \alpha \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \eta_i dt = 0. \quad 6.20$$

Až do této chvíle jsme neuvažovali vazby. Jejich vliv se projevuje tím, že některé funkce η_i jsou závislé [ve skutečnosti jsou omezeny podmínkami (6.19)]. Aby tedy bylo možné dále odvozovat, je nutné zmenšit počet proměnných na počet stupňů volnosti.

Variace q_i , uvažované v (6.20), tj. δ -variace, počítají se obvykle při neproměnném t ; potom jsou vazbami podmíněná omezení těchto variací dána m podmínkami

$$\sum_i a_{ri} \delta q_i = \sum_i a_{ri} \eta_i \delta \alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m). \quad 6.19'$$

Tyto podmínky mohou být kombinovány s (6.20), přičemž každou násobíme nějakou (dosud neurčenou) veličinou λ_r , integrujeme přes t v intervalu $t_1 - t_2$ a výsledek přidáme k (6.20). Pripustíme, že λ_r jsou závislé jenom na čase t , nikoliv už na dalších proměnných. Rovnosti (6.19') jsou identity, tudíž každý z nových integrálů je nulový. Máme tak

$$\delta \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{ri} \right] \eta_i dt = 0. \quad 6.21$$

Veličiny λ_r nebyly dosud určeny. Lze je tedy zvolit tak, aby

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{ri} = 0 \quad 6.22$$

pro $i = 1, 2, \dots, m$.

Tato volba upravuje (6.21) na:

$$\delta \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=m+1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{ri} \right] \eta_i dt = 0, \quad (6.21')$$

ve kterých jsou všechna η_i nezávislá, jelikož je právě $(n - m)$ stupňů volnosti. Koeficienty u η_i mohou být tedy nulové. To však souhlasí s rovnicemi (6.22), použitými pro $i = m +$

$1, m+2, \dots, n$. Kombinujíce tyto výsledky, dojdeme k tomu, že rovnice (6.22) platí pro všechna q_i . V této metodě se účinky vazeb uvažují ve skutečně symetrické podobě, která nerozlišuje mezi souřadnicemi. Je pravda, že m rovnic bylo získáno na základě jedné úvahy a ostatní na základě druhé, výsledky mají ale stejnou podobu, takže se různá q_i mezi sebou prakticky neliší. Konečné určení pohybu spočívá v nalezení $(n+m)$ neznámých veličin q_i a λ_r jako funkcí času. Pro tuto potřebu lze využít n rovnic typu (6.22) a m vazbových rovnic (6.19). Veličiny λ_r nejsou obvykle zajímavé a stačí je z rovnic vyloučit a stanovit q_i .

Určení λ_r je užitečné jedině v tom výjimečném případě, kdy musíme znát vazbové síly.

Jestliže se zbavíme vazeb a nahradíme je složkami zobecněných vazbových sil Q_i , tu bude pohyb systému popsán týmiž n souřadnicemi q_i , které jsou nyní nezávislé a vyhovující n pohybovým rovnicím

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i. \quad (6.23)$$

Jestliže požadujeme, aby tento pohyb byl shodný s pohybem za přítomnosti vazeb, musí se rovnice (6.23) shodovat s rovnicemi (6.22), tj.

$$Q_i = - \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{ri}. \quad (6.24)$$

Aby k zadanému pohybu došlo, musí být síly stejné bez ohledu na to, jak se nazývají, zdali „aktivní“ nebo „vazbové“. Z toho plyne, že (6.24) poskytují hodnoty vazbových sil.

Dlužno připomenout, že metody Lagrangeových neurčitých součinitelů může být také použito ve spojení s d'Alembertovým principem k odvození pozměněných pohybových rovnic v Newtonově formě.

PŘÍKLAD

Výsledky předešlých statí lze dobře ilustrovat na určení pohybu rovinného stejnorodého disku kotálejícího se bez tření po horizontální rovině. Jeho rovina je vertikální. Právě podmínky kotálení bez tření vyžadují použití neholonomních vazeb. Ostatní vazby (pevné těleso, vertikální rovina disku a horizontální rovina kotálení) lze uvážit vhodným výběrem soustavy souřadnic.

Zanedbáme-li neholonomní vazby, může být systém popsán udáním čtyř nezávislých souřadnic: kartézských souřadnic x, y stykového bodu disku s horizontální rovinou, úhlu ψ mezi osou disku a osou x a úhlu Θ mezi zvoleným poloměrem disku a vertikálou. (viz obr. 4). Lagrangián popisující systém je

$$L = \frac{\frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}A\dot{\Theta}^2 + 1}{2C\dot{\psi}^2}, \quad (6.25)$$

kde M je hmotnost disku, A a C jsou jeho momenty setrvačnosti vzhledem k vlastní ose a vzhledem k ose kolmé k ní.

Neholonomní vazba může být nyní dána vztahem

$$v = a\dot{\Theta}, \quad (6.26)$$

kde $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ a veličina a je poloměr disku. Rovnice (6.26) je ekvivalentní následujícím dvěma rovnicím

$$dx - a \sin \psi d\Theta = 0, \quad dy + a \cos \psi d\Theta = 0, \quad (6.26')$$

Hamiltonův princip

$$\delta \int L dt = 0$$

může být, tak jako dříve, rozvinut na

$$\delta \alpha \int \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta_i dt = 0,$$

tj.

$$\delta \alpha \int [M\ddot{x}\eta_x + M\ddot{y}\eta_y + A\ddot{\Theta}\eta_\Theta + C\ddot{\psi}\eta_\psi] dt = 0, \quad (6.27)$$

a zahrneme-li vazbové podmínky použitím neurčitých součinitelů, je

$$\begin{aligned} \delta \alpha \int [(M\ddot{x} + \lambda_1)\eta_x + (M\ddot{y} + \lambda_2)\eta_y + \\ + (A\ddot{\Theta} - \lambda_1 a \sin \psi + \lambda_2 a \cos \psi)\eta_\Theta + C\ddot{\psi}\eta_\psi] dt = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dva členy integrandu jsou nulové vlivem příslušné volby λ_r . Zbývají tedy v integrandu pouze dvě z libovolných veličin η ; je možné je považovat za nezávislé proměnné, jelikož jsou právě dva stupně volnosti. Má-li být integrál nulový, musí být koeficienty u těchto veličin rovněž nulové. Konečný výsledek je:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + \lambda_1 &= 0, \\ M\ddot{y} + \lambda_2 &= 0, \\ A\ddot{\Theta} - \lambda_1 a \sin \psi + \lambda_2 a \cos \psi &= 0, \\ C\ddot{\psi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 6.29$$

Je nutné určit nyní šest veličin: x , y , Θ , ψ , λ_1 , λ_2 . K tomu máme šest rovnic (6.26') a (6.29). Pro konečné řešení musíme znát počáteční hodnoty libovolných dvou proměnných x , y , Θ , ψ současně s jejich derivacemi podle času. Z hodnot λ_1 a λ_2 lze najít vazbami podmíněné síly tření.

Tento příklad není zcela obecný, jelikož členy s t v rovnicích (6.26') nejsou. To však podstatně způsob řešení nemění. Existují-li ovšem takové členy, pak jejich koeficienty nejsou v (6.28).

PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE

Zavedeme nyní nový a velmi obecný typ variace dráhy systému. Nazveme ji Δ -variací a budeme předpokládat, že se mění jak čas, tak prostorové souřadnice. V koncových bodech dráhy se prostorové souřadnice nebudou měnit, ale časové změny budou dovoleny. Nyní bude bod P na neproměnné dráze při následující změně souřadnic.

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \Delta q_i = q_i + \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t, \quad (6.30)$$

kde δ -variace má dřívejší význam a $\Delta q_i = 0$ v koncových bodech dráhy.

Pro libovolnou funkci $f = f(q_i, \dot{q}_i, t)$ Δ -variace je:

$$\Delta f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} (\delta q_i + \dot{q}_i \Delta t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} (\delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i \Delta t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \\
&= \delta f + \frac{df}{dt} \Delta t
\end{aligned} \tag{6.31}$$

při

$$\Delta \equiv \delta + \Delta \frac{d}{dt}. \tag{6.31'}$$

Uvažujme Δ -variaci Hamiltonovy akční funkce:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \Delta \int_1^2 L dt = \delta \int_1^2 L dt + |L \Delta t|_1^2 = \\
&= \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + |L \Delta t|_1^2.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Zde $\delta \int_1^2 dt$ není nulové, protože $\delta q_i \neq 0$ v koncových bodech dráhy. Z Lagrangeových pohybových rovnic a ze vztahu $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (\delta q_i)$ je:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) = \\
&= \frac{d}{dt} (p_i \Delta q_i) - \frac{d}{dt} (p_i q_i \Delta t).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Dosadíme-li výsledek (6.33) do výrazu (6.32) při podmínce $\Delta q_i = 0$ v koncových bodech, máme:

$$\Delta \int_1^2 L dt = \left| \left(L \sum_i p_i \dot{q}_i \right) \Delta t \right|_1^2 = - |H \Delta t|_1^2. \tag{6.34}$$

Uvažujeme-li systém omezený podmínkou $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ a uvažujeme-li pouze takové variace, pro něž H je konstantní, potom

$$|H \Delta t|_1^2 = \Delta \int_1^2 H dt. \tag{6.35}$$

Dosadíme-li tento výsledek do (6.34), konečně dostáváme, že

$$\Delta \int_1^2 \sum_i p_i \dot{q}_i dt = 0. \tag{6.36}$$

Toto je *princip nejmenší akce*. Veličina

$$W = \int \sum_i p_i \dot{q}_i dt$$

je obvykle známa jako *Hamiltonova charakteristická funkce*. Variace, které jsou obsaženy v principu, vystihují vztahy (6.30) s doplňujícím omezením, že totiž hamiltonián je integrálem

pohybu a má stejnou hodnotu jak pro variovanou, tak pro nevariovanou dráhu. V mechanice se tohoto principu jako Hamiltonova principu tak neužívá, ačkoliv při hamiltonovském odvození Hamiltonovy-Jacobiho rovnice je na něj brán zřetel (viz kap. VII). Je pozoruhodný svou totožností s původním variačním principem Maupertuisovým a také s ještě dřívějším Leibnitzovým principem, ve kterém je uvažován integrál ze *živé síly* systému. Je zde určitý zmatek v terminologii, jelikož někteří autoři používají termínu „nejmenší akce“ pro zde použitý název Hamiltonův princip.

Podrobný výklad mnohých dalších variačních principů, formulovaných v různých dobách, lze najít v Lanzosově knize, uvedené v přehledu literatury.

vii. TEORIE TRANSFORMACÍ

Při odvození Lagrangeových a Hamiltonových rovnic byla velká pozornost věnována tomu, aby byla vytvořena stejná forma všech obecných vztahů pro všechny soustavy souřadnic. Libovolná transformace souřadnic

$$q'_i = q'_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (7.1)$$

poskytuje formálně stejné rovnice, jako byly rovnice původní a q_i . Nejstručnější formulace tohoto tvrzení je, že „dané rovnice jsou kovariantní vzhledem k bodovým transformacím.“ Je třeba zdůraznit předpoklad, že singulární transformace jsou z úvahy vyloučeny.

V Hamiltonově formalismu byly jako doplněk k prostorovým souřadnicím zavedeny další proměnné — hybnosti, definované vztahy:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (5.1)$$

Již z prvního pohledu je zřejmé, že tyto proměnné mají úplně jiný význam než souřadnice. Avšak samo použití Hamiltonových kanonických vztahů ukazuje jistou podobu mezi těmito dvěma druhy proměnných. Jestliže ve vztazích

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.16)$$

zaměníme veličiny q_i a p_i za $-p'_i$ a q'_i , jsou rovnice (5.16) znovu

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H}{\partial p'_i}, \quad \dot{p}'_i = -\frac{\partial H}{\partial q'_i} \quad (7.2)$$

Rovnice (7.2) se vzhledově od rovnic (5.16) nijak neliší a jen ze samotných rovnic (7.2) by bylo možné usoudit, že q'_i jsou souřadnice a p'_i složky hybností. Faktem ovšem zůstává, že podle původních definic těchto veličin tomu tak není.

Uvedený výsledek je zjevný paradox, který lze odstranit jen tehdy, budeme-li q'_i a p'_i považovat za rovnoprávné. Původní postulát Hamiltonovy teorie, totiž že všechna q_i a p_i jsou nezávisle proměnné, je třeba doplnit tím, že ani jeden ze souborů těchto proměnných není důležitější než druhý.

Přirozeným důsledkem této úvahy jsou transformace

$$\left. \begin{aligned} q'_i &= q'_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), \\ p'_i &= p'_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

na které lze pohlížet jako na zobecnění transformací (7.1).

Zdůrazníme-li obecnou invariantnost rovnic, potřebujeme, aby oba soubory nových proměnných byly spojeny vztahy

$$\dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i}, \quad \dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i},$$

kde H' je určeno vztahem

$$H' = \sum_i p'_i q'_i - L'.$$

Funkce L' , je-li dosazena do Hamiltonova principu

$$\delta \int L' dt = 0,$$

dává správné pohybové rovnice v nových souřadnicích q'_i .

Transformace, které se shodují s těmito podmínkami, byly nazvány *kanonické transformace* nebo *kontaktní transformace*. *) Lze dokázat, že existují transformace typu (7.3), které tyto požadavky nesplňují, nemají však praktického významu.

Při studiu tohoto velmi obecného typu transformací se naše hledisko poněkud liší od hlediska z kap. III. Tam jsme při přechodu k zobecněným souřadnicím předpokládali, že nová podoba funkce L byla získána z původní podoby bezprostředním dosazením transformačních vztahů. Je to zvláštní případ velmi obecné transformace (tzv. *bodová transformace*) uvažované nyní. Nyní již není mezi dvěma formami lagrangiánu přímý vztah.

Z horního plyne, že pozměněná forma Hamiltonova principu se zachovává jak v původní, tak i v nové soustavě, tj.

$$\left. \begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum p_i \dot{q}_i - H] dt &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum p'_i \dot{q}'_i - H'] dt &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Dříve nezaznamenaná vlastnost δ -variací spočívá v tom, že podmínka $\delta \int f dt = 0$ je obecně splněna při $f = \frac{dF}{dt}$, kde F je libovolná funkce. To se nevztahuje k předešlým úvahám, kde byl integrand známou funkcí. Avšak zde je odlišná situace, neboť z rovnic (7.4) lze kombinací obdržet, že

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i \dot{q}'_i - H' \right) \right] dt = 0, \quad (7.5)$$

přičemž integrand je do určité míry neznámý. Z toho plyne, že

$$\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i \dot{q}'_i - H' \right) = \frac{dF}{dt}. \quad (7.6)$$

V první závorce je funkce proměnných q_i a p_i a t , v druhé závorce pak funkce proměnných q'_i , p'_i a t . Funkce F musí být tedy obecně závislá na $(4n + 1)$ proměnných q_i , p_i , q'_i , p'_i a

*) Poznámenejme, že tyto dva termíny nejsou vždycky synonymy, zde však budou užity v zaměnitelném smyslu.

t . Jenže tyto proměnné vyhovují transformačním rovnicím (7.3), pročež počet nezávislých proměnných se zmenšuje na $(2n + 1)$ proměnných, včetně t a libovolných $2n$ proměnných z q_i, p_i, q'_i a p'_i .

Uvažujme tento zvláštní případ:

$$F = F_1(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t), \quad (7.7)$$

takže

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (7.8)$$

Dosadíme-li (7.8) do (7.6), je

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum_i \left(p'_i - \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} \right) dq'_i + \left(H' - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0 \quad (7.9)$$

a jelikož q_i, q'_i a t je možné pokládat za nezávislé proměnné, lze psát, že

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_i, q'_i, t), \quad (7.10)$$

$$p'_i = \frac{\partial}{\partial q'_i} F_1(q_i, q'_i, t), \quad (7.11)$$

$$H' - H = \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i, q'_i, t). \quad (7.12)$$

Rovnice (7.10) je možné v principu řešit tak, že se najde funkce

$$q'_i = q'_i(q_i, p_i, t). \quad (7.10')$$

Dosadí-li se tento výsledek do rovnice (7.11), obdrží se funkce

$$p'_i = p'_i(q_i, p_i, t). \quad (7.11')$$

Dostali jsme konečně transformační rovnice typu (7.3). Z toho plyne, že takto lze získat transformační vztahy ze známé funkce F . Na tomto základě se funkci F říká *generační (vytvářející) funkce* transformace.

Poznamenejme, že podle rovnice (7.12) je transformovaná Hamiltonova funkce shodná s původní funkcí, jestliže generační funkce není explicitně závislá na čase.

Zpočátku se může zdát, že kanonická transformace je předpisována takovým způsobem, který odpovídá výběru libovolné integrační konstanty. Bližší rozbor však ukazuje, že tomu tak není. Je-li všech q_i, p_i, q'_i a p'_i určeno předem, není ve výběru F libovůle, naopak je to zcela definovaná funkce, závislá na transformačních vztazích; není tedy s podivem, že tyto vztahy lze z oné funkce odvodit. Z toho vzniká nepřesný výklad, že je lehčí odvodit transformační rovnice ze zadané funkce F než obráceně.

Je dobré ještě zdůraznit, že generační funkce může být vyjádřena prostřednictvím t a jakýchkoliv $2n$ ze $4n$ proměnných q_i, p_i, q'_i, p'_i . Někaký jiný případ než ten, který je určen funkcí (7.7), může být stanoven Legenderovou transformací této funkce, např:

$$F_2 = F_1(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t) + \sum_i p'_i q'_i. \quad (7.13)$$

V souhlase s podstatou Legendery transformace je nutné předpokládat, že nezávisle proměnné (q_i, q'_i, t) jsou nahrazeny nezávisle proměnnými (q_i, p'_i, t) . Znamená to, že

$$F_2 = F_1(q_1, \dots, q_n, p'_1, \dots, p'_n, t). \quad (7.13')$$

Uvažujme, jako dříve, stejnou transformaci:

$$\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i \dot{q}'_i - H' \right) = \frac{dF_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(F_2 - \sum_i q'_i p'_i \right),$$

odkud

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum_i \left(q'_i - \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \right) dp'_i + \left(H' - H - \frac{\partial F_2}{\partial t} \right) dt = 0, \quad (7.14)$$

z čehož

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (7.15)$$

$$q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i}, \quad (7.16)$$

$$H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (7.17)$$

Jelikož $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t}$, *) je (7.17) identická s (7.12), jak bylo možné očekávat podle toho, že se oba výrazy vztahují k jedné a téže transformaci. Dále pak (7.15) jsou shodné s (7.10), neboť $\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$. Rovnice (7.16) se jeví odlišnou od (7.11), je však ve skutečnosti jejím novým uspořádáním.

Výrazy vztahující se ke dvěma dalším hlavním typům generační funkce lze získat podobným způsobem. Lze je stručně zapsat takto:

$$F_3(p_i, q'_i, t) = F_1(q_i, q'_i, t) - \sum_i q_i p_i, \quad (7.18)$$

což dává

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_i}, \quad H' - H = \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (3.19)$$

a

$$F_4(p_i, p'_i, t) = F_1(q_i, q'_i, t) + \sum_i q'_i p'_i - \sum_i q_i p_i, \quad (7.20)$$

z čehož

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad q'_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p'_i}, \quad H' - H = \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (7.21)$$

PŘÍKLADY NA KANONICKÉ TRANSFORMACE

a) $F = \sum_i q_i p'_i$

*) Poznamenejme, že $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ a podobné další derivace jsou nulové, jelikož podle předpokladu všechny zde použité proměnné jsou nezávislé.

Toto je zřejmě speciální případ generační funkce F_2 ; použijeme-li (7.15) až (7.17), máme:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = p'_i, \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} = q_i, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H,$$

což znamená, že transformace daná touto funkcí je triviálním případem identické transformace.

Funkce $F = -\sum_i q_i p'_i$ vede na transformaci $q'_i = -q_i$, $p'_i = -p_i$, $H' = H$. Tento výsledek potvrzuje, že prostorová inverze je zvláštním případem kanonické transformace. Totéž pro jednoduchou inverzi času neplatí.

b) $F_2 = \sum_i q_i q'_i$

Z (7.10) až (7.12) plyne, že

$$p_i = q'_i, \quad p'_i = -q_i, \quad H = H',$$

kterážto transformace byla považována na počátku této kapitoly.

c) $F_2 = \sum_i f_j(q_i) p'_j$ (f_j je libovolná funkce)

Z toho

$$p_i = \sum_j p'_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad q'_i = f_i(q_k), \quad H' = H.$$

Z toho je zřejmé, jaký musí mít generační funkce vzhled, aby vzniklá transformace byla bodovou transformací.

Předešlé příklady pouze ukazují postup odvození transformačních rovnic, když je zadána určitá generační funkce. Nedělají si nárok na to, být samy o sobě zvlášť užitečné. V podstatě na tomto místě vzniká otázka „proč vlastně kanonické transformace studovat?“ Snahou této knihy je podat jisté představy o třídě metod, kterých se používá k formulaci problémů mechaniky. Jestliže je již úloha formulována prostřednictvím kanonických rovnic, pak jediným cílem kanonické transformace je taková úprava těchto rovnic, aby byly co nejsnáze řešitelné. Že tomu tak je, lze předvést na zvláštním příkladě.

Předpokládejme, že je třeba určit pohyb hmotného bodu, pro nějž Hamiltonova funkce nabývá vzhledu:

$$H = \frac{1}{2} \left(\mu q^2 + \frac{p^2}{m} \right); \quad (7.22)$$

(je ovšem známo, že toto je funkce odpovídající lineárním harmonickým kmitům hmotného bodu, ale připustíme, že to nevíme).

Postulování výrazu (7.22) je ekvivalentní následujícím pohybovým rovnicím:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\mu q. \quad (7.23)$$

V souhlase se závěry kap. V bezprostřední řešení těchto rovnic není zřejmé. Nejjednodušší cesta je v eliminaci p , což dává:

$$m\ddot{q} = -\mu q, \quad (7.24)$$

což je ve skutečnosti Lagrangeova rovnice systému a lze ji snadno utvořit bez zavedení Hamiltonovy funkce.

Jako další jiný postup uvažujeme kanonickou transformaci vyvolanou funkcí

$$F_1 = kq^2 \cot q'; \quad (7.25)$$

pro tuto transformaci z (7.10) až (7.12) je:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2kq \cot q', \quad H = H', \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} = kq^2 \csc^2 q',$$

z čehož

$$p = \sqrt{4kp'} \cos q', \quad q = \sqrt{\frac{p'}{k}} \sin q' \quad (7.26)$$

a z toho

$$\begin{aligned} H' &= \frac{1}{2} \left(\mu q^2 + \frac{p^2}{m} \right) = \frac{1}{2} \left(\mu \frac{p'}{k} \sin^2 q' + \frac{4kp'}{m} \cos^2 q' \right) = \\ &= \frac{\mu p'}{2k} \left(\sin^2 q' + \frac{4k^2}{m\mu} \cos^2 q' \right); \end{aligned} \quad (7.27)$$

jestliže $k = \frac{1}{2}\sqrt{m\mu}$ zúží se tento výsledek na

$$H' = \frac{\mu p'}{2k} = p' \sqrt{\frac{\mu}{m}}, \quad (7.28)$$

což je zvláště jednoduché. Jelikož q' je cyklická souřadnice, je

$$\dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial q'} = 0$$

a z toho

$$p' = \text{konst.} = \alpha, \quad (7.29)$$

kde α je integrační konstanta; tedy

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \sqrt{\frac{\mu}{m}} (= \text{konst.})$$

a

$$q' = \sqrt{\frac{\mu}{m}} t + \beta. \quad (7.30)$$

Požadované výrazy pro p a q lze nyní obdržet dosazením vztahů (7.29) a (7.30) do rovnic (7.26).

V tomto případě se staly Hamiltonovy rovnice řešitelné až po použití kanonické transformace, pomocí níž vznikla nová soustava, ve které byla souřadnice polohy cyklickou. Jelikož je již odpověď na tuto úlohu známa, lze na ni pohlížet jako na ilustraci obecné metody, s jejíž pomocí lze udělat všechny souřadnice cyklickými vlivem patřičného výběru generační funkce. Na tomto místě není jasné, že určení této funkce je vlastně cokoliv jiného, jen ne dohady. Vyvinutí nějakého racionálního způsobu k jejímu určení je podáno v následujícím článku.

Použitím (7.27), (7.29) a (7.30) z předešlého příkladu dojdeme k takovému vedlejšímu výsledku:

$$J = \oint p dq = \int_0^{2\pi} 2p' \cos^2 q' dq' = 2\pi\alpha (= \text{konst.}). \quad (7.31)$$

Veličiny J a q' jsou známé jako proměnné akce a úhlu. V prvotních stadiích rozvoje kvantové mechaniky byly kvantové vlastnosti periodických systémů popisovány postulováním možných hodnot J , jež musely všechny být celistvými násobky Planckovy konstanty h .

Zde je popsána metoda pro explicitní určení generační funkce, ze které mohou být odvozeny transformace, jež činí Hamiltonovy rovnice řešitelnými. Hledaná transformace musí být zvláštním typem již dříve zkoumaných transformací, neboť je zapotřebí, aby všechny nové prostorové souřadnice a hybnosti byly konstantní.

Předpokládejme, že požadovaná transformace existuje a je vytvořena funkcí $S = S(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t)$, která musí být zvláštním případem funkce F_1 , uvažované v předcházejícím článku.

Z předešlých postulátů je:

$$q_i = \text{konst} = \alpha_i, \quad p_i = \text{konst} = \beta_i, \quad (7.32)$$

z čehož

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \quad (7.33)$$

Jelikož transformace je kanonická, je

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i},$$

odkud při uvážení (7.32) obdržíme

$$\frac{\partial H'}{\partial p'_i} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial q'_i} = 0. \quad (7.34)$$

Je možné zavést další podmínku $\frac{\partial H'}{\partial t} = 0$. Pak bude H' konstanta, kterou lze považovat za nulovou, neboť, jestliže transformace S vede na transformovanou Hamiltonovu funkci $H_0 = \text{konst} = A$, tu $S = S_0 - At$ dává $H' = 0$. Z (7.12) je

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (7.35)$$

a z (7.10)

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (7.36)$$

z čehož

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.35')$$

Rovnice (7.35') je parciální diferenciální rovnice prvního řádu, nazvaná *Hamiltonovou–Jacobiho rovnicí*. Může být explicitně sepsána pro jakoukoliv zvláštní případ, jelikož hamiltonián bude známou funkcí q_i , p_i a t . Její řešení může být obtížné, ale budeme je principiálně předpokládat. V dalším se omezíme jen na vyjasnění způsobu řešení.

Jelikož Hamiltonova–Jacobiho rovnice zahrnuje $(n+1)$ nezávislých proměnných q_i a t , její řešení bude obsahovat $(n+1)$ libovolných konstant. Jestliže S_0 je nějaké možné řešení, plyne jasně ze zápisu (7.35'), že $S_1 = (S_0 + \text{konst})$ je pochopitelně také řešením. Takto je jedna z $(n+1)$ libovolných konstant uvážena a lze ji zanedbat, jelikož v rovnici jsou pouze derivace S . Pro obecné řešení lze nyní napsat, že

$$S = S_0(q_1, \dots, q_n, c_1, \dots, c_n, t), \quad (7.37)$$

v čemž jsou c_i libovolné konstanty.

Na počátku byla ovšem úvaha, že

$$S = S(q_1, \dots, s, q_n, q'_1, \dots, s, q'_n, t),$$

přičemž $q'_i = \alpha_i = \text{konst.}$ Konstanty c_i musejí s konstantami α_i souviset a skutečně s nimi mohou být identifikovány. Toto zjištění totožnosti požaduje, aby rovnice (7.32) až (7.34) byly splněny, když α_i jsou zaměněny za c_i . Odvození ukazuje, že tomu tak opravdu je, ovšem s vyloučením druhé rovnice (7.32).

Podle (7.11) generační funkce daná vztahem (7.37) poskytuje následující složky hybnosti:

$$p'_i = -\frac{\partial S_0}{\partial c_i}. \quad (7.38)$$

Tudíž podle (7.37)

$$\frac{dp'_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial S_0}{\partial c_i} = -\left[\sum_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_j \partial c_i} \dot{q}_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial t \partial c_i} \right] \quad (7.39)$$

a také, jelikož S_0 je řešením (7.35'):

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial t \partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial S_0}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial c_i} \left[H \left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, t \right) \right]. \quad (7.40)$$

Parciální diferencování (7.37) podle c_i zachovává q_i a t konstantními, tudíž při použití (7.36) a kanonických rovnic $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ je vztah (7.40):

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial t \partial c_i} = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_j} \right)} \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_j} \right) = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S_0}{\partial c_i \partial q_j} = -\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial c_i \partial q_j}. \quad (7.41)$$

Dosadíme-li nakonec výraz (7.41) do (7.39), obdržíme

$$\frac{dp'_i}{dt} = 0, \quad \text{tj.} \quad p'_i = \text{konst.}$$

Ztotožnění c_i a α_i tak splňuje všechny původní požadavky transformace.

K úplnému určení generační funkce S je nevyhnutelné znát hodnoty konstant $\alpha_i = c_i$. Tyto konstanty mohou být nalezeny dosazením daných počátečních hodnot systému (tj. hodnot q_i a p_i při $t = t_0$) do rovnic (7.36) a jejich řešením pro α_i . Jestliže je dále požadována znalost hodnot (konstant) transformovaných složek hybnosti $p'_i = \beta_i$, lze je nalézt z (7.38).

Tím se dovršuje řešení úlohy natolik, nakolik se mluví o transformaci, ovšem naší hlavní snahou je řešení prvotních Hamiltonových rovnic, tj. určení p_i a q_i jako funkcí času. Proto je nutné dosadit α_i a β_i do obecného tvaru rovnic (7.38), které jsou pak řešeny pro q_i jako $q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t)$; konečně po dosazení α_i a q_i do (7.36) jsou nalezena p_i jako $p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i, t)$.

Ač to v řešení nepomůže, další úvahy nám osvětlí význam funkce S . Z rovnice (7.6) je

$$\frac{dS}{dt} = \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i \dot{q}'_i - H' \right) = \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = L.$$

z čehož

$$S = \int L dt, \quad (7.42)$$

tj. funkci S lze ztotožnit s Hamiltonovou principiální funkcí (odtud je vzat symbol). Bohužel integrace nemůže být uskutečněna, dokud q_i a p_i nejsou známé funkce času, tj. dokud není úloha rozřešena. Takové spojení je ovšem bez praktického významu.

PŘÍKLAD

Ke znázornění Hamiltonovy–Jacobiho metody uvážíme znova jednoduchý harmonický oscilátor. Pro tento problém

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{m} p^2 + \mu q^2 \right) \quad (7.43)$$

a tomu odpovídající Hamiltonova-Jacobiho rovnice je

$$\frac{1}{2} \left[\frac{l}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \mu q^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.44)$$

Kdykoliv hamiltonián neobsahuje explicitně čas t , řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice je:

$$S(q, \alpha, t) = S'(q, \alpha) - c(\alpha)t.$$

Podle diskuse obecného případu konstanta $c(\alpha)$ může být ztotožněna s konstantou α , takže

$$S(q, \alpha, t) = S'(q, \alpha) - \alpha t \quad (7.45)$$

a (7.44) přechází na

$$\frac{1}{2} \left[\frac{l}{m} \left(\frac{\partial S'}{\partial q} \right)^2 + \mu q^2 \right] - \alpha = 0,$$

tj.

$$\frac{\partial S'}{\partial q} (= p) = \sqrt{m\mu} \left(\frac{2\alpha}{\mu} - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.46)$$

z čehož

$$S = S' - \alpha t = \sqrt{m\mu} \int \left(\frac{2\alpha}{\mu} - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} dq + D(\alpha) - \alpha t, \quad (7.47)$$

kde D je integrační konstanta, kterou, jak jsme ukázali dříve, lze bez újmy na obecnosti zanedbat.

V tomto případě není nutné integrováním obdržet explicitní formu S . Z (7.47) je

$$\beta = -\frac{\partial S}{\partial \alpha} = t - \sqrt{m\mu} \int \frac{l}{\mu} \left(\frac{2\alpha}{\mu} - q^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dq = t - \sqrt{\frac{m}{\mu}} \cos^{-1} \left(q \sqrt{\frac{0\mu}{2\alpha}} \right). \quad (7.48)$$

Vezmeme-li počáteční podmínky $q = 0$, $p = \sqrt{2mE_0}$ při $t = 0$ a dosadíme-li je do (7.46), obdržíme

$$\alpha = E_0. \quad (7.49)$$

tj. transformovaná zobecněná souřadnice je ztotožněna s celkovou energií.

Ze vztahu (7.48) je také

$$\beta = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\mu}}. \quad (7.50)$$

Z výrazu (7.48) plyne dále explicitní vyjádření q , tj.

$$q = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu}} \cos \left(t \sqrt{\frac{\mu}{m}} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.51)$$

a z výrazu (7.46)

$$p = \sqrt{2mE_0} \sin \left(t \sqrt{\frac{\mu}{m}} + \frac{\pi}{2} \right). \quad (7.52)$$

což je ovšem obvyklé řešení tohoto problému.

Když více než jeden pár kanonických proměnných a t není v H explicitně obsažen, pak řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice má vždy vzhled

$$S(q_i, \alpha_i, t) = S'(q_i, \alpha_i) - \alpha t, \quad (7.53)$$

kde ve všech nás zajímajících případech lze α ztotožnit s celkovou energií.*) Leč plné určení S je možné, jen když proměnné q_i jsou v Hamiltonově-Jacobiho rovnici separovatelné.

NEKONEČNĚ MALÉ KONTAKTNÍ TRANSFORMACE

Když byly diskutovány příklady kanonických transformací, ukázali jsme, že funkce $F_2 = \sum_i q_i p'_i$ vytváří identickou transformaci. Jestliže ε je nějaký nekonečně malý parametr nezávislý na q_i a p_i , bude nekonečně malá změna proměnných vytvářena funkcí

$$F = \sum_i q_i p'_i + \varepsilon G(q_i, p'_i), \quad (7.54)$$

kde G je libovolná funkce. Podle (7.15) a (7.16) jsou nové proměnné dány vztahy:

$$q'_i = \frac{\partial F}{\partial p'_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p'_i}, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = p'_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad (7.55)$$

tj.

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p'_i}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (7.56)$$

a jelikož $(p'_i - p_i)$ je nekonečně malé, stačí zaměnit ve funkci G veličinu p'_i na p_i , tzn.

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial}{\partial p_i} G(q_i, p_i), \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial q_i} G(q_i, p_i). \quad (7.56')$$

Generační funkcí byla nejprve nazvána funkce F , avšak v případě nekonečně malé kontaktní transformace se obvykle tento popis přenáší na funkci G . Rovnice (7.56') takto určují nekonečně malé změny sdružených proměnných, které jsou vyvolány libovolnou funkcí G .

Jako zvláštní případ uvažujme

$$\varepsilon = dt, \quad G = H; \quad (7.57)$$

pak při použití kanonických rovnic máme

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = dt \cdot \dot{q}_i, \quad \delta p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = dt \cdot \dot{p}_i, \quad (7.58)$$

*) Viz článek „Geometrická a vlnová mechanika“ na str. (___??_ PAGEREF !!!)

tj. změny sdružených proměnných vyvolané užitím hamiltoniánu jako generační funkce jsou skutečně takové, jaké v systému během pohybu nastávají. Změny za konečný interval času od t_0 do t možno považovat za výsledek posloupnosti takových nekonečně malých změn, jež byly vyvolány H . Pohyb systému může být takto uvažován za nepřetržité uskutečňování kontaktní transformace vyvolávané hamiltoniánem systému.

GEOMETRICKÁ A VLNOVÁ MECHANIKA

Na základě předchozího článku je nyní možné Hamiltonovu-Jacobiho metodu vyložit poněkud jinak. Dříve byly tato metoda uvažována jako prostředek pro řešení úloh pomocí přechodu k novým kanonickým rovnicím, ve kterých jsou všechny proměnné integrály pohybu. Takovou interpretaci podal Jacobi. Jiný pohled, prvně předložený Hamiltonem, považuje S za funkci, která transformuje prostorové souřadnice z jejich počáteční hodnoty q'_i při $t = 0$ na jejich hodnotu q_i v čase t . Takto stručně popisuje časový vývoj systému.

Podle definice

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H,$$

takže

$$S = \int L dt = \int \sum_i p_i \dot{q}_i dt - \int H dt = W - \int H dt. \quad (7.59)$$

Podle počátečního předpokladu $S = S(q_i, q'_i, t)$. Odtud, omezíme-li se jen na systémy, pro které $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ a $H = E$ a vyloučíme-li veličiny q'_i , jelikož je nyní považujeme za konstantní počáteční hodnoty, máme:

$$S(q_i, t) = W - Et. \quad (7.60)$$

Princip nejmenší akce (6.36) tvrdí, že $\delta W = 0$. Z určení δ -variace dané v kap. VI je jasné, že W může být pouze závislé na polohových souřadnicích koncových bodů dráhy, tj.

$$S(q_i, t) = W(q_i) - Et, \quad (7.60')$$

jak jsme ukázali dříve v (7.53).

Je možné vyvinout obecnou interpretaci výrazu (7.60') v pojmech vlnového pohybu. Omezíme se na jednoduchý zvláštní příklad, který zde použité úvahy dobře osvětlí.

Uvažujme systém o jednom hmotném bodu, na který působí konzervativní síly, a použitá soustava souřadnic je kartézská. Obecný zápis Hamiltonovy-Jacobiho rovnice jest:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0;$$

pro náš zvláštní případ z (7.36) a (7.60') máme, že

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{p} = \nabla W \quad (7.61a)$$

a také

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (7.61b)$$

z čehož Hamiltonova-Jacobiho rovnice jest:

$$\frac{1}{2m} (\nabla W)^2 + V = E, \quad (7.62)$$

tj.

$$|\nabla W| = \sqrt{2m(E - V)}. \quad (7.62')$$

Dříve jsme již ukázali, že pohyb systému lze v konfiguračním prostoru znázornit nějakou spojitou čarou. V tomto případě tato čára bude skutečnou trajektorií hmotného bodu v obyčejném prostoru. Rovnost $W = \text{konst}$ představuje v tomto prostoru soubor ploch a (7.61a) vyjadřuje, že trajektorie hmotných bodů jsou vždy k těmto plochám kolmé. To připomíná vztahy mezi vlnoplochami a paprsky v optice. Předpokládejme, že pohyb hmotného bodu ve skutečnosti s takovou nějakou formou vlnového pohybu v tomto směru souvisí. Jsou-li takovéto vlnové vlastnosti popsány vlnovou funkcí ψ , která vyhovuje rovnici podobné skalární vlnové rovnici v optice, potom

$$\nabla^2 \psi + \frac{\mu^2}{v_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (7.63)$$

kde se uvažuje změna rychlosti vlnění od bodu k bodu zavedením „indexu lomu“ μ , který je spojitou funkcí souřadnic. Omezíme-li se jen na jednu frekvenci ω , máme

$$\nabla^2 \psi + \frac{\mu^2 \omega^2}{v_0^2} \psi = 0. \quad (7.63')$$

Obecné řešení této rovnice nechť je:

$$\psi = \psi_0(q_i) e^{i[k_0 f(q_i) - \omega t]} \quad (7.64)$$

kde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{v_0}$ a ψ_0 je reálné.

„Omezíme-li se na případ malé změny indexu lomu na jedné vlnové délce“, lze dokázat, že musí být splněna podmínka

$$(\nabla f)^2 = \mu^2. \quad (7.65)$$

Plochy konstantní fáze jsou dány vztahem

$$k_0 f(q_i) - \omega t = \phi(q_i, t) = \text{konst}. \quad (7.66)$$

Tato rovnice je ale analogická rovnici (7.60'), takže lze ztotožnit plochy o konstantním S (které lze zobrazit v konfiguračním prostoru a které se budou v každém okamžiku shodovat s různými plochami $W = \text{konst}$ (viz obr. 6) s vlnoplochami konstantní fáze. Z tohoto ztotožnění plyne, že

$$S = a\phi, \quad W = ak_0 f, \quad E = a\omega, \quad (7.67)$$

kde a je zatím libovolná konstanta. Výrazy (7.65), (7.67) a (7.62') poskytují nyní následující hodnotu „indexu lomu“:

$$\mu = |\nabla f| = \frac{1}{ak_0} |\nabla W| = \frac{v_0}{\omega a} \sqrt{2m(E - V)}; \quad (7.68)$$

vlnová rovnice (7.63') je pak:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m(E - V)}{a^2} \psi = 0. \quad (7.69)$$

Položíme-li zde $a = \frac{h}{2\pi}$, dostaneme Schrödingerovu vlnovou rovnici pro jeden hmotný bod v konzervativním poli. Z uvedeného je vidět, že Schrödingerova vlnová mechanika je v obdobném vztahu k obyčejné mechanice hmotného bodu jako fyzikální optika ke geometrické optice.*) Proto je často mechanika hmotného bodu nazývána geometrickou mechanikou.

FERMATŮV PRINCIP

V analogii s posledním článkem lze jít i obrácenou cestou. V případě hmotného bodu dosazení výrazů (7.61a) a (7.68) do principu nejmenší akce (6.36) dává

$$\delta \int \mu ds = 0 \quad (7.70)$$

Tento výsledek, použit v optice, vyjadřuje *Fermatův princip nejmenší optické dráhy*.

*) Se současnými pracemi v této oblasti nás seznámí kniha J. L. Synge „Geometrical Mechanics and de Broglie Waves“.

DEFINICE

Nechť $F = F(q_i, p_i, t)$ je nějaká dynamická proměnná systému, závisající na sdružených proměnných q_i, p_i . Potom

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (8.1)$$

Použitím Hamiltonových kanonických rovnic (5.16) tento výraz lze přepsat na

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Veličina $\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$ hraje v rozvoji analytické mechaniky velkou roli a nazývá se Poissonovou závorkou (???) funkcí F a H . V obecném případě je Poissonova závorka libovolných dvou proměnných veličin X a Y definována jako

$$[X, Y]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right). \quad (8.3)$$

Toto pojetí nijak podstatně řešení pohybových rovnic systému neusnadňuje, ale jak uvidíme, je prospěšné při rozboru integrálů pohybu. Dochází se k takovému matematickému aparátu, který je při jisté, nikterak složité interpretaci vhodně použitelný k zavedení pravidel kvantování v Heisenbergově formulaci kvantové mechaniky.

Přímo z definice závorek plynou následující identity:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X], \\ [X, X] &= 0, \\ [X, Y + Z] &= [X, Y] + [X, Z], \\ [X, YZ] &= Y[X, Z] + [X, Y]Z \end{aligned} \quad (8.4)$$

a také

$$\begin{aligned} [q_i, q_j]_{q,p} &= 0 = [p_i, p_j]_{q,p} \\ [q_i, p_j] &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

kde δ_{ij} je obvyklý delta-symbol s vlastnostmi

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 0 \text{ při } i \neq j, \\ \delta_{ij} &= 1 \text{ při } i = j.\end{aligned}$$

Veličiny (8.5) jsou známy jako *fundamentální* nebo *základní* Poissonovy závorky.

INVARIANCE VZHLEDEM KE KANONICKÝM TRANSFORMACÍM

Velmi důležitou vlastností závorek je jejich invariance vzhledem ke kanonickým transformacím. Znamená to, že

$$[X, Y]_{q,p} = [X, Y]_{q',p'},$$

přičemž X a Y mají stejnou *hodnotu* ve dvou rozličných soustavách souřadnic, ale nikoliv *závazně* stejnou *formu*.

Důkaz předešlého tvrzení lze provést, použijeme-li myšlenek z poslední kapitoly. Tam bylo ukázáno, že kanonická transformace může být vytvořena funkcí $F_1 = F_1(q_i, q'_i, t)$, přičemž platí následující vztahy:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q'_i}, \quad (7.10)$$

$$p'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (7.11)$$

z nichž plyne, že

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q'_j \partial q_i} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i} \quad (8.6)$$

a podobným způsobem, využijeme-li dalších typů generačních funkcí F_2, F_3, F_4 , je

$$\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} = -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}. \quad (8.6')$$

Použitím těchto výsledků na fundamentální Poissonovy závorky dostaneme:

$$[q'_i, p'_j]_{q,p} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q'_j} \right) \equiv \frac{\partial q'_i}{\partial q'_j} = \delta_{ij} = [q', p'] q'_i p'_j$$

a podobně

$$\left. \begin{aligned} [q'_i, q'_j]_{q,p} &= 0 = [q'_i, q'_j]_{q,p} \\ [p'_i, p'_j]_{q,p} &= 0 = [p'_i, p'_j]_{q,p} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Pro fundamentální závorky byl tedy důkaz podán. Uvažujme nyní obecný případ:

$$\begin{aligned} [X, Y]_{q',p'} &\equiv \sum_k \left(\frac{\partial X}{\partial q'_k} \frac{\partial Y}{\partial p'_k} - \frac{\partial X}{\partial p'_k} \frac{\partial Y}{\partial q'_k} \right) = \\ &= \sum_{jk} \left[\frac{\partial X}{\partial q'_k} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p'_k} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p'_k} \right) - \frac{\partial X}{\partial p'_k} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{\partial Y}{\partial q_j} [q', p'] X q_j + \frac{\partial Y}{\partial p_j} [q', p'] p_j X \right\}. \quad (8.8)$$

Na výraz $[q_j, X]_{q', p'}$ lze pohlížet jako na zvláštní případ výrazu (8.8), vzniklý záměnou q_j za X a X za Y . Potom při použití (8.7) je

$$[X, q_j]_{q', p'} = -[q_j, X]_{q', p'} = -\sum_k \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_k} [q_j, q_k]_{q', p'} + \frac{\partial X}{\partial p_k} [q_j, p_k]_{q', p'} \right\} = -\sum_k \frac{\partial X}{\partial p_k} \delta_{jk} = -\frac{\partial X}{\partial p_j}. \quad (8.9)$$

Podobně

$$[X, p_j]_{q', p'} = \frac{\partial X}{\partial q_j}. \quad (8.10)$$

Dosadíme-li (8.9) a (8.10) do (8.8), obdržíme

$$[X, Y]_{q', p'} = \sum_j \left(-\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial X}{\partial p_j} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial X}{\partial q_j} \right) \equiv [X, Y]_{q, p} \quad (8.11)$$

což potvrzuje správnost výsledku v obecném případě. Jelikož hodnota Poissonovy závorky není závislá na souboru sdružených proměnných, vzhledem k nimž je vyjádřena, nejsou indexy u závorek nutné a budou tedy nyní vynechávány.

MOMENT HYBNOSTI

Ve zvláštních případech lze ztotožnit komponenty momentu hybnosti s komponentami zobecněné hybnosti. Obecně lze takové ztotožnění momentu hybnosti, sdruženého s nějakou úhlovou souřadnicí, uskutečnit u prostého mechanického systému, kde se nevyskytují např. elektromagnetické efekty. Je zajímavé prozkoumat Poissonovu závorku dvou složek momentu hybnosti. Pro jednoduchost uvažujeme hmotný bod v kartézské souřadné soustavě. Složky momentu hybnosti pak jsou:

$$l_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, l_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, l_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1, \quad (8.12)$$

kde $p_1 = x \dot{x}_1$ atd. Výpočet Poissonovy závorky pro l_1 a l_2 dává:

$$[l_1, l_2] = (p_2 x_1 - p_1 x_2) = l_3.$$

Podobné výsledky dostaneme i pro druhé kombinace. Lze je obecně napsat jako

$$[l_i, l_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} l_k, \quad (8.13)$$

$\varepsilon_{ijk} = 1$, jestliže (i, j, k) je sudá permutace čísel $(1, 2, 3)$,
kde $\varepsilon_{ijk} = -1$, jestliže (i, j, k) je lichá permutace čísel $(1, 2, 3)$,
 $= 0$ pro ostatní případy.

Důsledek (8.13) je, že nemohou být takové dvě složky momentu hybnosti, které by byly současně sdružené proměnné, jelikož všechny sdružené proměnné musí vyhovovat zákonům, daným rovnicemi (8.7) a vztahujícím se k fundamentálním závorkám. Konečně libovolná

složka momentu hybnosti může být pokládána za zobecněnou hybnost, ovšem v nějaké zvláštní vybrané referenční soustavě lze vybrat pouze jednu takovou složku.

Uvažujme nyní $[l_i, l^2]$, kde l^2 je kvadrát celkového momentu hybnosti. Použijeme-li identitu (8.4) a výsledku (8.13), je

$$[l_i, l^2] = \left[l_i, \sum_j l_j^2 \right] = \sum_j [l_i, l_j^2] = \sum_j 2l_j [l_i, l_j] = \sum_{j,k} 2l_j \varepsilon_{ijk} l_k = 0, \quad (8.14)$$

tj. l^2 a libovolná jedna složka l mohou být současně považovány za sdružené proměnné. Výsledky (8.13) a (8.14) jsou velmi důležité pro použití tohoto formalismu v kvantové mechanice.

Další, neméně důležité výsledky jsou:

$$[x_i, l_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k, \quad [p_i, l_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k, \quad (8.15)$$

kde p_i v tomto případě stále označuje složku hybnosti v kartézské soustavě souřadnic.

INTEGRÁLY POHYBU

Zdůraznili jsme již, že v některých případech je řešení úlohy možno pokládat za ukončené, když byly stanoveny integrály pohybu a vyjasněn jejich smysl. Rovnost (8.2) zapsaná pomocí Poissonových závorek ukazuje, že časová změna nějaké dynamické proměnné F je dána vztahem

$$\dot{F} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (8.2')$$

Z toho plyne, že v případě, kdy takováto proměnná neobsahuje explicitně čas a má být integrálem pohybu, postačuje, aby Poissonova závorka z této proměnné a H byla nulová. Tento výsledek poskytuje užitečné určení integrálů pohybu i bez ohledu na to, je-li nebo není H samo integrálem pohybu.

Speciálním případem vzorce (8.2') je:

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H] \quad (8.16)$$

Tyto vztahy jsou totožné s Hamiltonovými kanonickými rovnicemi a lze je považovat za kanonické rovnice, vyjádřené formou Poissonových závorek.

Druhý zvláštní případ je:

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (8.17)$$

Tento výraz byl již dříve také odvozen.

JACOBIHO IDENTITA

Uvažujme výraz:

$$[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = \left[X, \sum_i \left(\frac{\partial Y}{\partial q_i} \frac{\partial Z}{\partial p_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial Z}{\partial q_i} \right) \right] - \left[Y, \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Z}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Z}{\partial q_i} \right) \right];$$

použijeme-li identit (8.4) a přeskupíme-li výrazy, dostaneme

$$\sum_i \left\{ -\frac{\partial Z}{\partial q_i} \left(\left[\frac{\partial X}{\partial p_i}, Y \right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial p_i} \right] \right) + \frac{\partial Z}{\partial p_i} \left(\left[\frac{\partial X}{\partial q_i}, Y \right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right] \right) \right\} + \\ + \sum_i \left\{ \frac{\partial Y}{\partial q_i} \left[X, \frac{\partial Z}{\partial p_i} \right] - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \left[X, \frac{\partial Z}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial X}{\partial q_i} \left[Y, \frac{\partial Z}{\partial p_i} \right] + \frac{\partial X}{\partial p_i} \left[Y, \frac{\partial Z}{\partial q_i} \right] \right\}.$$

Při identitě

$$\frac{\partial}{\partial x} [X, Y] \equiv \left[\frac{\partial X}{\partial x}, Y \right] + \left[X, \frac{\partial Y}{\partial x} \right] \quad (8.18)$$

redukuje se první výraz na

$$\sum_i \left\{ -\frac{\partial Z}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [X, Y] + \frac{\partial Z}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [X, Y] \right\} = -[Z, [X, Y]];$$

druhý výraz, jak můžeme ukázat, vymizí. Odtud

$$[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = -[Z, [X, Y]]$$

a v symetrické formě

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \quad (8.19)$$

Tento výsledek je znám jako Jacobiho identita. Může být použita v následujícím. Nechť $Z = H$, potom

$$[X, [Y, H]] + [Y, [H, X]] + [H, [X, Y]] = 0. \quad (8.20)$$

Jestliže nyní veličiny X a Y jsou obě integrály pohybu, tu

$$[Y, H] = 0, \quad [X, H] = 0, \quad (8.21)$$

z čehož

$$[H, [X, Y]] = 0, \quad (8.22)$$

tj. dynamická proměnná $[X, Y]$ je také integrálem pohybu. Použití tohoto výsledku je v možnosti konstrukce nových integrálů pohybu ze známých integrálů pohybu. Leč ne vždy mají tyto nové integrály netriviální hodnoty (např. použití $p_i = \text{konst}$ a $p_j = \text{konst}$ vede pouze na $0 = \text{konst}$).

POISSONOVY ZÁVORKY A KOMUTÁTORY

V kvantové mechanice jsou dynamické proměnné reprezentovány operátory, které nesplňují komutační pravidla obyčejné algebry. Pro tyto operátory nelze Poissonovy závorky definovat, ale univerzální podstata a všeobecný prospěch těchto závorek v klasické mechanice vyvolávají představu, že mohou existovat analogické veličiny spojené s operátory.

Rovnice (8.4) poskytují základní vlastnosti Poissonových závorek. Předpokládejme, že tyto rovnice zachycují také vlastnosti veličin spojených s odpovídajícími operátory kvantové mechaniky. (Poznamenejme, že tento předpoklad se nejeví jako nevyhnutelný a že ve skutečnosti nebude pro všechny typy operátorů správný.) Za tohoto předpokladu pro libovolné tři operátory X, Y, Z máme:

$$[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z$$

a

$$[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y,$$

kde s výhodou použijeme těchto symbolů pro označení kvantověmechanických analogií Poissonovy závorky. Je třeba mít v této souvislosti na zřeteli, že je nutné zachovat pořadí operátorů s ohledem na jejich nekomutativnost.

Z toho plyne, že pro libovolné čtyři operátory W, X, Y, Z máme:

$$[WX, YZ] = W[Z, YZ] + [X, YZ]W = W[X, Y]Z + WY[X, Z] + Y[X, Z]W + [X, Y]ZW,$$

čili při rozvedení v různém pořádku

$$[WX, YZ] = [WX, Y]Z + Y[WX, Z] = W[X, Y]Z + [W, Y]XZ + YW[X, Y] + Y[W, Z]X.$$

Kombinací těchto výsledků dostaneme

$$(WY - YW)[X, Z] = [W, Y](XZ - ZX). \quad (8.23)$$

Předpokládali jsme, že uvedené čtyři operátory jsou libovolné. Z toho plyne, že identita (8.23) je splněna jen tehdy, platí li pro libovolné dva operátory A a B

$$(AB - BA) = \alpha[A, B], \quad (8.24)$$

kde α je určitá konstanta, tj. kvantová analogie Poissonovy závorky je násobek komutátoru dvou uvažovaných operátorů. Předpokládáme-li, že operátory odpovídající sdruženým proměnným q_i, p_i hrají tutéž základní úlohu jako tyto klasické proměnné, potom

$$(q_i p_j - p_j q_i) = \alpha \delta_{ij}. \quad (8.25)$$

Postulujeme-li dále, že $\alpha = \frac{i\hbar}{2\pi}$, dojdeme k pravidlům kvantování v Heisenbergově formulaci kvantové mechaniky.

NEKONEČNĚ MALÉ KONTAKTNÍ TRANSFORMACE

Tyto transformace byly krátce popsány v předcházející kapitole. Přitom se ukázalo, že generační funkce

$$F = \sum_i q_i p'_i + \varepsilon G(q_i, p'_i), \quad (7.54)$$

kde G je libovolné, vyvolává následující změny ve sdružených proměnných:

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p'_i}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad (7.56')$$

kde bylo použito předpokladu, že nekonečně malá transformace je výhodná pro nahrazení p'_i za p_i v G .

S ohledem na tyto změny v q_i a p_i bude změna v hodnotě nějaké dynamické proměnné $X = (q_i, p_i, t)$ dána vztahem:

$$\delta X = \sum_i \frac{\partial X}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial X}{\partial p_i} \delta p_i, \quad (8.26)$$

z čehož při (7.56')

$$\delta X = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon [X, G]. \quad (8.27)$$

Jestliže $G = H$ a $\varepsilon = dt$, vztah (8.27) přechází na

$$\delta X = dt [X, H]. \quad (8.28)$$

Když $X = q_i$, (8.28) dává

$$\delta q_i = dt [q_i, H] = \dot{q}_i dt.$$

Na získaný výsledek lze pohlížet tak, že nekonečně malá transformace, vyvolaná H , odpovídá skutečnému pohybu systému. Totéž platí, ztotožní-li se X s libovolnou sdruženou proměnnou p_i . Je však nutné dát pozor při zkoumání obecného případu, protože s ohledem na (8.2') je

$$[X, H] = \frac{dX}{dt} - \frac{\partial X}{\partial t},$$

takže (8.28) nabývá vzhledu

$$\delta X = \left(\frac{dX}{dt} - \frac{\partial X}{\partial t} \right) dt; \quad (8.28')$$

z toho plyne při $\frac{\partial X}{\partial t} \neq 0$, že změna δX při uvedené transformaci není skutečnou změnou X v důsledku pohybu.

Obecný význam (8.28) je takový: jde-li o libovolné dynamické proměnné, jež nejsou explicitně závislé na t , pak je pohyb systému ekvivalentní posloupnosti nekonečně malých kontaktních transformací, vyvolaných hamiltoniánem.

Jiný význam formule (8.27), dosadí-li se za X veličina H , plyne z výrazu

$$\delta H = \varepsilon [H, G]. \quad (8.29)$$

Z toho plyne, že integrál pohybu G (pro který $[H, G] = 0$) vyvolává nekonečně malou transformaci, vzhledem ke které je H invariant. Ve speciálním případě, kdy $G = p_x = \text{konst}$ (=integrál pohybu), jeví se uvažovaná transformace jako nekonečně malé posunutí podél osy x . To je zřetelně vidět, použijeme-li (7.56'):

$$\delta x = \varepsilon, \quad \delta y = \delta z = 0, \quad \delta p_x = \delta p_y = \delta p_z = 0.$$

Jeví se tudíž hamiltonián invariantem posunutí, pro které je odpovídající složka hybnosti neproměnná. Je to pouze druhý způsob vyjádření té okolnosti, že cyklické souřadnice odpovídá konstantní složka hybnosti. Podobný výsledek se obdrží i při studiu nekonečně malých otočení, vyvolaných funkcí G , ztotožněnou se složkami momentu hybnosti. Tyto poslední úvahy připomínají nám soudy z kap. V, kde byla zkoumána souvislost mezi symetrií a integrály pohybu. Zavedení argumentů, založených na Poissonových závorkách, dovolilo rozšířit oblast použití těchto úvah a zahrnout do ní všechny integrály pohybu, nejen integrály hybnosti, jak tomu bylo dříve. Nyní jsme ukázali, že hamiltonián je invariant (a v důsledku toho systém symetrický) vzhledem k nekonečně malé transformaci, vyvolané některým integrálem pohybu. Opačné tvrzení je také správné a umožňuje nalézt integrály pohybu při pozorném zkoumání libovolné symetrie, která se vyskytuje v hamiltoniánu.

Lagrangeova a Hamiltonova metoda byla do této doby použita k diskrétním systémům, majícím konečný počet stupňů volnosti. Účelem této kapitoly je rozšíření těchto metod na spojité systémy, ve kterých je počet stupňů volnosti nekonečně veliký. Toto rozšíření není těžká věc, jestliže je známa vhodná Lagrangeova funkce; ovšem ve formě parametrů, na kterých různé funkce závisí, je určité překvapení.

LAGRANGEOVA METODA

Aby byly pochopitelné nevyhnutelné změny metody, musíme rozšířit úvahy vyložené v předcházejících člancích. Zvláštním případem spojitého systému se jeví spojité, jednorozměrné a pružné těleso, na které lze pohlížet jako na mezní případ lineárního řetězce vzájemně se ovlivňujících hmotných bodů. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že vzájemné ovlivňování je uskutečněno pružinami, které spojují každý pár sousedních hmotných bodů (viz obr. 7).

Nechť všechny hmotné body mají stejnou hmotnost m , jsou rozloženy na vzdálenostech a od sebe a jsou spojeny pružinami s vhodným součinitelem pružnosti k . Jako už dříve označíme i nyní posunutí i -tého hmotného bodu η_i . Jeho pohybová rovnice potom je:

$$m\ddot{\eta}_i = k[(\eta_{i+1} - \eta_i) - (\eta_i - \eta_{i-1})]. \quad (9.1)$$

Uvažovaný systém je konzervativní, takže síly mohou být odvozeny z následujícího skalárního potenciálu:*)

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (9.2)$$

Kinetická energie systému je

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2, \quad (9.3)$$

*) Při sestavení rovnic zkoumané úlohy vzniká známá potíž, způsobená tím, že všechny hmotné body se ve svém pohybu podřizují jedné a téže rovnici. Má-li zobrazený řetězec konečnou délku, je nevyhnutelné předpokládat existenci doplňujících hraničních sil. Je-li délka systému nekonečná, budou takové funkce jako V divergovat, nebude-li předpokládána existence periodických okrajových podmínek; přitom je nevyhnutelné počítat s tím, že délka zaujímá toliko jednu periodu. V dalším budeme předpokládat, že úloha je řešena při některém z těchto omezení.

z čehož Lagrangeova funkce

$$L = T - V = \sum_i \left[\frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right] = \sum_i a L_i. \quad (9.4)$$

Jednoduchá zkouška ukáže, že se Lagrangeovy rovnice, získané diferencováním této funkce obvyklým způsobem, shodují s rovnicemi (9.1).

Od tohoto diskrétního systému lze přejít ke spojitému prostředí pomocí následující analogie:

$$\left. \begin{aligned} a &\rightarrow dx, \sum () \rightarrow \int () dx, \\ \frac{m}{a} &\rightarrow \rho \text{ hustota, } ka \rightarrow E \text{ Youngův modul,} \\ \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} &\rightarrow \frac{d\eta}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

z čehož

$$L \rightarrow \int \mathcal{L} dx, \quad (9.6)$$

kde*)

$$\uparrow = \frac{1}{2} \left[\rho \dot{\eta}^2 - E \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right]. \quad (9.7)$$

Ukazuje se tedy, že na Lagrangeovu funkci, vystihující celý zadaný systém, lze pohlížet jako na integrál z jiné (hustoty) funkce. Funkce $\uparrow$ se nazývá *Lagrangeova hustota* systému.

Aplikujeme-li Hamiltonův princip, můžeme psát

$$\delta \int L dt = 0. \quad (9.8)$$

S ohledem na (9.6) lze toto přepsat na

$$\delta \int \int \uparrow dx dt = 0. \quad (9.9)$$

Nelze ovšem zaručit, že Hamiltonův princip bude skutečně použitelný a že jediným kritériem jeho správnosti bude shoda pohybových rovnic, plynoucích z tohoto principu, s rovnicemi, které byly odvozeny jiným způsobem.

*) Poznámenejme, že je zde použito symbolů totálních derivací v podmínkách, v kterých se obvykle používá symbol parciálního derivování. Základem je zde to, že x a t jsou nezávislé proměnné, takže není nutné tuto okolnost nějak zvlášť poznamenávat.

Dodatečně bude nutné derivovat funkce závislé na x a t prostřednictvím jejich explicitní závislosti na η a jeho derivacích.

Pak bude obvykle použito vztahu

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{d\eta_x}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_x} + \frac{d\dot{\eta}}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}},$$

kde $\eta_x = \frac{d\eta}{dx}$. Podobně tomu je se vztahem pro $\frac{d}{dx}$. Zobecnění těchto vztahů na třírozměrný prostor a na větší počet proměnných η je zřejmé.

Použití takovýchto vztahů zaručuje jednotnost označování a umožňuje vyhnout se zavedení nových symbolů.

Hamiltonův princip ve tvaru (9.9) se dříve nevyskytoval, avšak sama formule napovídá, že x a t je nutné považovat za rovnocenné proměnné. Proto se variace tohoto integrálu uskutečňují prostřednictvím takové změny integrační cesty, aby se zachovalo umístění koncových bodů (η_1, x_1, t_1) a (η_2, x_2, t_2) trajektorie při měnících se ve všech hodnotách η s velikostmi x a t . Nutné a postačující podmínky k tomu, aby pro takové variace měl integrál stacionární hodnotu, byly uvedeny v kap. VI [rovnice (6.9)]; převedeme-li je do zde potřebné podoby, máme:

$$\left(\frac{\partial \downarrow}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \downarrow}{\partial \dot{\eta}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \downarrow}{\partial \eta_{|x}} \right) = 0. \quad (9.10)$$

kde $\eta_{|x} \equiv \frac{d\eta}{dx}$.

Použití výrazu (9.10) ke zkoumanému případu dává:

$$\frac{d}{dt} (\rho \dot{\eta}) - E \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0,$$

čili

$$\rho \ddot{\eta} = E \frac{d^2 \eta}{dx^2} \quad (9.11)$$

V této rovnici lze lehko poznat vztah popisující šíření vln v jednorozměrném pružném tělese, který lze obvykle dostat jako mezní formu (9.1). Takto tedy předpoklad, že Hamiltonova principu lze použít na spojitá prostředí, vede ve zkoumaném zvláštním případě k neodporujícím si výsledkům.

Ve všech případech, které lze takto uvažovat, se dochází k podobnému souhlasu. Z toho můžeme vyvodit, že pohybové rovnice spojitého prostředí mohou být vyjádřeny následující matematickou formou:

$$\delta \int L dt = \delta \int \int \int \int \downarrow dt dx_1 dx_2 dx_3 = \delta \int \int \downarrow dV dt = 0. \quad (9.12)$$

Předpokládá se, že najít Lagrangeovu hustotu (---)

$$\downarrow = \downarrow \left(\eta^{(r)}, \frac{d\eta^{(r)}}{dt}, \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}, x_j, t \right),$$

ze které je možné odvodit rovnice popisující pohyb prostředí. Zde byly uvažovány tři prostorové (kartézské) souřadnice a n proměnných $\eta^{(r)}$. Podstata těchto proměnných (obvykle nazvaných *polní proměnné*) není obecně omezena na přemístění, jak tomu bylo v horním příkladu z elasticity. Ukazuje se např., že tato metoda je přiměřená pro popis elektromagnetického pole, ve kterém jsou nejméně čtyři polní proměnné, tvořené skalárním potenciálem ϕ a třemi složkami vektorového potenciálu $\mathbf{A}$. Tato otázka bude podrobně osvětlena v kap. XI po relativistických úvahách v kap. X.

Podmínce (9.12) bude vyhověno, splní-li se n rovnic

$$\frac{\partial \downarrow}{\partial \eta^{(r)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \downarrow}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \downarrow}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} = 0, \quad (9.13)$$

kde

$$\eta_{|j}^{(r)} = \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}.$$

Výraz

$$\frac{\partial \downarrow}{\partial \eta} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \downarrow}{\partial \eta_{|j}}$$

je často psán jako $\frac{\delta \downarrow}{\delta \eta}$ a je nazýván *funkcionální derivací* L . Patrně jedinou výhodou tohoto označení je jeho krátkost.

Jelikož se postuluje, že druhé derivace nejsou v Lagrangeově hustotě obsaženy, tu $\frac{\partial \downarrow}{\partial \dot{\eta}_{|j}} \equiv 0$, z čehož

$$\frac{\partial \downarrow}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial \downarrow}{\partial \dot{\eta}} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \downarrow}{\partial \dot{\eta}_{|j}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}};$$

rovnice (9.13) může být takto přepsána na

$$\frac{\delta L}{\delta \eta^{(r)}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \delta \dot{\eta}^{(r)}}. \quad (9.13')$$

Tyto vztahy se svou podobou shodují s odpovídajícími pohybovými rovnicemi systému jednotlivých hmotných bodů, ovšem nic nového proti (9.13) neposkytují.

Původní výsledek těchto úvah je, že v případě spojitých prostředí mají polní proměnné $\eta^{(r)}$ stejný význam jako prostorové souřadnice v diskrétních systémech. Prostorové souřadnice jsou rovněž ve vzorcích, avšak spolu s časem t jsou nezávislými parametry. Při této příležitosti je opět dobré připomenout následující kapitoly, jakoby totiž tato symetrická podoba časové proměnné a prostorových souřadnic usnadňovala pozdější zavedení relativistických úvah.

HAMILTONOVA METODA

Použití této metody je zde obdobné s jejím použitím v případě diskrétních prostředí, nehledě ovšem na zavedení funkce hustoty a funkcionálních derivací místo obyčejných parciálních derivací.

V případě *diskrétního systému* je hybnost, sdružená s proměnnou η_i , definována jako

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (9.14)$$

Při přechodu ke spojitým prostředím pak

$$L = \sum_i a L_i \rightarrow \int \mathcal{L} dx \quad (9.6)$$

takže

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} dx, \quad (9.15)$$

tj. definice sdružené hybnosti pro spojitě prostředí, analogická definici pro diskrétní prostřední, vede na nekonečně malé veličiny. Využijeme-li toho, lze definovat ještě *hustotu hybnosti*:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}, \quad (9.16)$$

která je ovšem konečná.

V obecném případě máme n polních proměnných $\eta^{(r)}$ a n odpovídajících *sdružených proměnných* (nebo *kanonických hustot hybnosti*) $\pi^{(r)} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\eta}^{(r)}$. V souhlase s předcházejícími rozvahami je *hustota Hamiltonovy funkce* definována jako

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi^{(r)} \dot{\eta}^{(r)} - \mathcal{L}, \quad (9.17)$$

přičemž samotná Hamiltonova funkce je

$$H = \int \mathcal{H} dV. \quad (9.18)$$

Nutno poznamenat, že

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \left(\eta^{(r)}, \frac{dr_j^{(r)}}{dx_j}, \pi^{(r)}, x_j, t \right), \quad (9.19)$$

jelikož se zde závislost na $\dot{\eta}^{(r)}$ pokládá za vyloučenou. V Hamiltonově teorii jsou všechna $\eta^{(r)}$ a $\pi^{(r)}$ považována za nezávisle proměnné funkce x_i a t . To je rozdíl proti Lagrangeovu popisu, kde pouze $\eta^{(r)}$ byly považovány za nezávisle proměnné. Situace je ovšem analogická se situací v mechanice hmotných bodů. Společným cílem bude určení zobecněných polních proměnných jako explicitních funkcí prostorových a časových souřadnic obdobně s mechanikou hmotných bodů, kde jsou zobecněné souřadnice určeny jako funkce t .

V rozebraném zvláštním případě $L = T - V$ a $H = T + V$, což je celková energie. Avšak je velmi těžké formulovat obecné podmínky pro ztotožnění hamiltoniánu s celkovou energií systému. Co se týče z něj odvozených pohybových rovnic, tu libovolný lagrangián lze násobit jakoukoliv konstantou, aniž by se změnila jeho vlastnost; odtud první požadavek při ztotožnění hamiltoniánu s energií je v určení této násobící konstanty tak, aby jeden nebo více členů lagrangiánu bylo možné považovat za některou formu energie. (V diskrétním případě se toto uskutečňuje samo od sebe, jestliže alespoň jeden člen v pohybových rovnicích je složkou skutečné síly v Newtonově smyslu.)

Druhá podmínka je, že osy souřadnic musí být vzhledem k odečítací soustavě v klidu. Vážné omezení to není, jelikož pohybující se osy se vyskytují ve spojitém prostředí velmi řídké. Je to však cenné upozornění s ohledem na příklad uvedený v diskusi k témuž problému v kap. V.

Jsou-li splněna horní omezení a systém není disipativní, tu se obvykle předpokládá, že hamiltonián je shodný s celkovou energií. Případy odlišné od čistě konzervativních systémů musí se, přísně vzato, zkoumat zvlášť, jakož i případ pohybu hmotného bodu v elektromagnetickém poli. Takové ztotožnění je velmi důležité, jelikož hlavní význam hamiltoniánu spočívá v tom, že je měřítkem celkové energie, která přitom může být vypočítána bez určení složek síly jako v Newtonově pojetí.

HAMILTONOVY KANONICKÉ POHYBOVÉ ROVNICE

Uvažujeme nyní totální diferenciál z $\mathcal{H}$:

$$d\mathcal{H} = \sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} d\eta_{|j}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{(r)}} d\pi^{(r)} \right] + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt. \quad (9.20)$$

Z (9.17) také:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{H} &= \sum_r \left[\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} + \pi^{(r)} d\dot{\eta}^{(r)} \right] - d\mathcal{L} = \sum_r \left[\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} d\dot{\eta}^{(r)} \right] - \\
&- \sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} d\eta_{|j}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} d\dot{\eta}^{(r)} \right] - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \\
&= \sum_r \left[\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} d\eta_{|j}^{(r)} \right] - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (9.21)
\end{aligned}$$

Porovnáme-li v (9.20) a (9.21) koeficienty u stejných diferenciálů, je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta^{(r)}} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}}, \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{(r)}} &= \dot{\eta}^{(r)}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}.
\end{aligned} \quad (9.22)$$

První tři z těchto vztahů mohou být nazvány Hamiltonovými rovnicemi pohybu, ale ještě nejsou v přijatelné podobě. Z (9.13), (9.16) a (9.22) je

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\pi}^{(r)} &\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} = \\
&= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta^{(r)}} + \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} \equiv -\frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}}, \\
\dot{\eta}^{(r)} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{(r)}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{|j}^{(r)}} \equiv \frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}},
\end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

jelikož v $\mathcal{H}$ derivace $\pi^{(r)}$ nejsou.

Vztahy analogické k předešlým kanonickým rovnicím tak jsou:

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}} = \dot{\eta}^{(r)}, \quad \frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}} = -\dot{\pi}^{(r)}. \quad (9.23')$$

Je možné také poznamenat, že

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (9.24)$$

ačkoliv se zde explicitní závislost na čase a prostorových souřadnicích vyskytuje řídce.

ZÁKONY ZACHOVÁNÍ HUSTOTY

Je velmi zajímavé vyšetřovat časovou změnu hustoty hamiltoniánu. Z (9.21) a (9.22) při uvažování, že t a x_j jsou nezávisle proměnné, je:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_r \left[\left(\dot{\pi}^{(r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} \right) \dot{\eta}^{(r)} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} \dot{\eta}_{|j}^{(r)} \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (9.21')$$

Z Lagrangeových pohybových rovnic plyne také:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} = 0, \quad (9.13)$$

čili

$$\left(\dot{\eta}^{(r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} \right) = - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}}.$$

Dosazení tohoto výsledku do (9.21') dává:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \sum_j \sum_r \left[\frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} \right) \dot{\eta}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} \dot{\eta}_{|j}^{(r)} \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \sum_j \frac{dS_j}{dx_j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (9.25)$$

kde

$$S_j = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|j}^{(r)}} \dot{\eta}^{(r)}. \quad (9.26)$$

V případech, které nás zajímají, je $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0$, takže (9.25) nyní je

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0. \quad (9.25')$$

Jelikož $\mathcal{H}$ lze považovat za celkovou energii, můžeme tuto rovnici považovat za rovnici kontinuity pro energii, nebo za *zákon zachování energie*, přičemž $\mathbf{S}$ je vektor, představující tok energie. Vektor $\mathbf{S}$ není jediný, jelikož rovnici (9.25') lze splnit i při jiném vektoru $\mathbf{S}' = \mathbf{S} + \nabla \times \mathbf{X}$, kde $\mathbf{X}$ je libovolný vektor a $\mathbf{S}$ je dán vztahem (9.26). Úvahy lze však obvykle zjednodušit, bude-li řešen případ, kdy $\nabla \times \mathbf{X} = 0$.

Vzhled hustot $\mathcal{H}$ a $\mathbf{S}$ upozorňuje na možnost vyšetřování analogických veličin definovaných výrazy

$$\mathcal{G}_j = - \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \eta_{|j}^{(r)}. \quad (9.27)$$

Jedinou zřejmou vlastností takových veličin je, bez zřetele k podstatě $\eta^{(r)}$, že mají rozměr obyčejných hybností. Je možné ve skutečnosti je ztotožnit se speciálními veličinami takového druhu, jak bylo možné vidět v jednoduchém případě jednorozměrného pružného tělesa.

Uvažujme uvnitř tohoto tělesa vrstvu tloušťky Δx (viz obr. 8). Předpokládejme, že roviny ohraničující vrstvu se vzhledem k odečítači soustavě nepohybují a že posunutí, vystižená polními proměnnými η , budou dána pohybem prostředí skrz tyto roviny. Uvažujme jednotku plochy roviny. Hmotnost prostředí, vstupujícího *do vrstvy* u x , je $\varrho \eta$ a hmotnost prostředí vystupujícího u $x + \Delta x$, je $\varrho[\eta + (d\eta/dx)\Delta x]$. Hmotnost, která do vrstvy vstoupila, je tedy $[-\varrho(d\eta/dx)\Delta x]$.

Tento výsledek dává změnu hybnosti vrstvy na jednotku plochy $[-\varrho(d\eta/dx)]\dot{\eta}\Delta x$, tj. změna hustoty hybnosti vrstvy se rovná veličině $[-\varrho\dot{\eta}(d\eta/dx)]$. Tuto veličinu nelze plést s $\varrho\dot{\eta}$, což je skutečná *hustota hybnosti prostředí*. Představuje novou *diferenciální* veličinu, kterou lze nazvat *hustotu vlnové hybnosti*, jelikož je nenulová pouze pro vlnový pohyb, při němž $d\eta/dx \neq 0$.

Vzpomeňme si, že Lagrangeovy hustoty, vhodné pro popis vlastností jednorozměrného pružného tělesa, byly

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\varrho \dot{\eta}^2 - E \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right]. \quad (9.7)$$

Je zřejmé, že v tomto jednorozměrném případě jediná veličina, určená formulí (9.27), je $\mathcal{G} = -\rho \dot{\eta} d\eta/dx$. Je totožná s právě vyšetřovanou veličinou, nazvanou hustotou vlnové hybnosti. Podobné ztotožnění lze provést i v jiných případech, kde polní proměnné představují posunutí hmotného prostředí. V obecném případě (9.27) se užívá k určení hustoty vlnové (nebo polní) hybnosti.

Vzniká nyní otázka, existují-li zákony zachování pro vlnovou (nebo polní) hybnost. Uvažujeme časovou derivaci $\mathcal{G}_j$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left[\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \eta_{|j}^{(r)} \right] = -\sum_r \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \right) \eta_{|j}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \frac{d}{dt} \left(\eta_{|j}^{(r)} \right) \right] = \\ &= -\sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial x_j} - \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i^{(r)}} \right) \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \frac{d\dot{\eta}^{(r)}}{dx_j} \right]; \end{aligned}$$

při použití (9.13)

$$\frac{d\mathcal{G}_j}{dt} = -\frac{d\mathcal{L}}{dx_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} + \sum_r \sum_i \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i^{(r)}} \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} \right) = \sum_i \frac{d}{dx_i} \sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i^{(r)}} \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} - \delta_{ij} \mathcal{L} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}. \quad (9.28)$$

Jestliže x_j není v $\mathcal{L}$ obsaženo explicitně, potom $\partial \mathcal{L}/\partial x_j = 0$. Při tomto ne příliš silném omezení složky hustoty vlnové hybnosti se podřizují zákonu zachování, který lze napsat takto:

$$\frac{d\mathcal{G}_j}{dt} = \sum_i \frac{dT_{ij}}{dx_i}. \quad (9.29)$$

Veličiny

$$T_{ij} = \sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j^{(r)}} \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} - \delta_{ij} \mathcal{L} \right)$$

jsou složky tenzoru druhého řádu, ztotožnitelného s tenzorem napětí. Poznamenejme však, že uvedený systém napětí působí na roviny pevné vzhledem k osám souřadnic a nepohybující se s prostředím. Bylo by také možné pokládat tyto veličiny za složky vektorů představujících tok hybnosti v analogii s vektorem toku energie **S**.

INTEGRÁLNÍ ZÁKONY ZACHOVÁNÍ A POISSONOVY ZÁVORKY

Předpokládáme-li opět, že $\mathcal{L}$ a $\mathcal{H}$ nejsou explicitně závislé na čase, ze vztahu (9.25) máme:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathcal{H} dV = \int \frac{d\mathcal{H}}{dt} dV = - \int \nabla \cdot \mathbf{S} dV = - \int \mathbf{S} d\sigma, \quad (9.30)$$

kde je poslední integrál vzat přes plochu, která oblast integrace ohraničuje. Tento integrál vymizí, jestliže má systém konečné rozměry a nachází se uvnitř integrační oblasti. Lze také ukázat, že je nulový i pro nekonečný systém při periodických hraničních podmínkách. To tedy znamená, že v každém z těchto případů je celková energie integrálem pohybu.

Podobné úvahy jsou správné i pro celkovou vlnovou či polní hybnost $\mathbf{G} = \int \mathcal{G} dV$, jelikož z (9.28)

$$\frac{dG_j}{dt} = \int \frac{d\mathcal{G}_j}{dt} dV = \int \sum_i \frac{dT_{ij}}{dx_i} dV + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} dV. \quad (9.31)$$

Ve všech prakticky zajímavých případech

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \right) = 0;$$

tedy integrál divergence vymizí za týchž podmínek jako dříve. Odtud je **G** integrálem pohybu při těchže omezujících podmínkách, jako je tomu u H .

Hustota momentu vlnové hybnosti může být definována jako

$$\mathcal{M}_{ij} = x_i \mathcal{G}_j - x_j \mathcal{G}_i.$$

Tato definice je ve shodě s dřívějším užitím termínu momentu hybnosti. Totální derivace podle času ze složek celkového momentu vlnové hybnosti je dána vztahem

$$\frac{d\mathcal{M}_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathcal{M}_{ij} dV = \int \left(x_i \frac{d\mathcal{G}_j}{dt} - x_j \frac{d\mathcal{G}_i}{dt} \right) dV$$

a při použití (9.29)

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \int \sum_k \left(x_i \frac{dT_{kj}}{dx_k} - x_j \frac{dT_{ki}}{dx_k} \right) dV = \int \sum_k \frac{d}{dx_k} (x_i T_{kj} - x_j T_{ki}) dV - \int (T_{ij} - T_{ji}) dV. \quad (9.32)$$

Člen s divergencí při stejných dřívějších podmínkách vymizí, takže zbývá

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \int (T_{ji} - T_{ij}) dV. \quad (9.32')$$

Obyčejně se postulují, že celkový moment hybnosti systému je integrálem pohybu. Z (9.32') vidíme, že tenzor napětí T_{ij} je symetrický. Pro mechanické systémy je toto obvykle splněno samovolně. Ve výjimečných případech lze uskutečnit symetrizaci tohoto tenzoru přidáním vhodných členů k Lagrangeově hustotě. Tato možnost je spojena s určitým stupněm libovůle, o které byla řeč v souvislosti s vektorem toku energie **S**. Tato otázka bude znovu při velmi obecných podmínkách uvažována v kap. XI.

Jako v mechanice hmotných bodů, tak i zde je určení integrálů pohybu velmi důležitá věc; zajímavé je určení časové derivace obecné integrální dynamické proměnné, dané vztahem

$$Y = \int \mathcal{Y} dV, \quad (9.33)$$

kde

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\eta^{(r)}, \eta_{|i}^{(r)}, \pi^{(r)}, x_i, t), \quad (9.34)$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \int \frac{d\mathcal{Y}}{dt} dV = \int \left[\sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta^{(r)}} \dot{\eta}^{(r)} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta_{|i}^{(r)}} \frac{d}{dt} \eta_{|i}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \pi^{(r)}} \dot{\pi}^{(r)} \right) + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t} \right] dV = \\ &= \int \left[\sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta^{(r)}} - \sum_i \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \eta_{|i}^{(r)}} \right) \dot{\eta}^{(r)} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \pi^{(r)}} \dot{\pi}^{(r)} \right] dV + \int \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Zde byl druhý člen integrován po částech a předpokládalo se jako dříve, že $\dot{\eta}^{(r)}$ na okrajích vymizí, nebo že tam platí periodické hraniční podmínky.

Použijeme-li označení funkcionálních derivací a kanonických rovnic (9.23), vztahy (9.25) přejdou na

$$\frac{dY}{dt} = \int \sum_r \left(\frac{\delta Y}{\delta \eta^{(r)}} \frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}} - \frac{\delta Y}{\delta \pi^{(r)}} \frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}} \right) dV + \int \frac{\partial Y}{\partial t} dV. \quad (9.36)$$

Tato forma výsledku je v některých směrech podobná analogickému výsledku pro diskrétní případ. To lze zdůraznit, rozšíříme-li definici Poissonovy závorky:

$$[X, Y] \equiv \int \sum_r \left(\frac{\delta X}{\delta \eta^{(r)}} \frac{\delta Y}{\delta \pi^{(r)}} - \frac{\delta X}{\delta \pi^{(r)}} \frac{\delta Y}{\delta \eta^{(r)}} \right) dV; \quad (9.37)$$

(9.36) pak je

$$\frac{dY}{dt} = [Y, H] + \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad (9.38)$$

což je formálně stejné jako výsledek pro systém jednotlivých bodů.

Tato nová definice neposkytuje další informace. Můžeme však ukázat, že uvažované vztahy jsou naprosto analogické k Poissonovým závorkám z kap. VIII a mají také, jako tyto závorky, stejný univerzální význam. Definice se vztahuje jenom na integrální veličiny; zvlášť pak zde nejsou vztahy, odpovídající fundamentálním závorkám vyskytujícím se v diskrétním případě.

PŘECHOD KE KVANTOVÉ MECHANICE

Okolnost, že se fundamentální Poissonovy závorky u spojitých systémů nevyskytují, naznačuje, že přechod ke kvantové mechanice nelze uskutečnit přesně tak, jako u diskrétních systémů. Metoda k překonání těchto těžkostí bude ukázána znovu na již použitém našem elementárním příkladu. V tomto případě jednotlivých hmotných bodů, pružně mezi sebou spojených, jsou kanonické hybnosti dány vztahy:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (9.15)$$

Zde lze použít původní definice Poissonovy závorky, takže máme, že

$$[\eta_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad (9.39)$$

tj.

$$\sum_j [\eta_i, p_j] = \sum_j \delta_{ij} = 1. \quad (9.39')$$

Při přechodu ke kvantové mechanice to vede, jak jsme ukázali v kap. VIII, k odpovídajícím vztahům pro komutátory *operátorů* η_i a p_j :

$$\sum_j (\eta_i p_j - p_j \eta_i) = \alpha (= i\hbar/2\pi). \quad (9.40)$$

Předpokládejme, že při přechodu ke kontinuu se vyskytují taková operátorová přiřazení, jako tomu bylo pro klasické dynamické proměnné, tj.

$$\eta_i \rightarrow \eta(x), \quad p_j \rightarrow \pi(x') dx'. \quad (9.41)$$

Potom (9.40) přechází na

$$\int [\eta(x)\pi(x') - \pi(x')\eta(x)]dx' = \alpha, \quad (9.42)$$

což může být interpretováno jako

$$[\eta(x)\pi(x') - \pi(x')\eta(x)] = \alpha.\delta(x - x'), \quad (9.43)$$

kde $\delta(x - x')$ je Diracova delta funkce, určená vztahy

$$\left. \begin{aligned} \delta(x - x') &= 0 & x &\neq x', \\ \int f(x)\delta(x - x')dx &= f(x') \end{aligned} \right\} \quad (9.44)$$

za předpokladu, že oblast integrace obsahuje x' .

Tento výsledek lze zobecnit na případ n polních operátorů $\eta^{(r)}$ současně s jejich sdruženými operátory hybností $\pi^{(r)}$, takže pro třírozměrný prostor je

$$[\eta^{(r)}(\mathbf{r})\pi^{(s)}(\mathbf{r}') - \pi^{(s)}(\mathbf{r}')\eta^{(r)}(\mathbf{r})] = \alpha\delta_{rs}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (9.45)$$

kde

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2)\delta(x_3 - x'_3).$$

Zavedeme-li $\alpha = i\hbar/2\pi$, dostaneme normální způsob kvantového popisu spojitého prostředí.

APLIKACE

V této kapitole byl vyvinut poněkud náročný aparát pro rozšíření Lagrangeova a Hamiltonova formalismu na spojitá prostředí. Ukázalo se, že lze bez obtíží zobecnit mnohé charakteristické rysy nespojitých systémů. Úvahy lze rozšířit a ukázat existenci předešlé souvislosti mezi integrály pohybu a symetrickými vlastnostmi systému.*)

Formalismus byl vyvinut se zvláštním ohledem k jednoduchosti hmotného systému. Ukázalo se, že je použitelný i k mnohem složitějším hmotným systémům.**)

Takto mohou být odvozeny obecné rovnice pro šíření elastických vln v izotropním tělese, vezme-li se v úvahu Lagrangeova hustota tvaru

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \left[(\lambda + \mu) \sum_j \frac{d\eta_j}{dx_j} \frac{d\eta_j}{dx_i} + \mu \sum_j \left(\frac{d\eta_i}{dx_j} \right)^2 - \varrho \left(\frac{d\eta_i}{dt} \right)^2 \right],$$

kde η je vektor posunutí libovolného bodu, μ je modul ve střihu daného prostředí a $(\lambda + 2\mu/3)$ je jeho objemový modul. Polními proměnnými nejsou zde nutně posunutí. Nevířivý pohyb stlačitelné nevazké kapaliny v tzv. akustickém přiblížení je odvoditelný z hustoty

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varrho \left[(\nabla\psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right].$$

*) Rozbor této otázky je zvláště v práci *Hill E. L.*: Rev. Mod. Phys. 23, 253-60 (1951).

**) Objasnění viz v knize Morse a Feshbacha, která je zahrnuta v literatuře.

V tomto zjednodušeném systému jediná polní proměnná ψ je rychlostní potenciál definovaný vztahem $\mathbf{v} = \nabla\psi$.

Pro spojitě hmotné systémy použití této analytické metody spočívá především v lehkosti, s jakou je možné najít přechod k soustavě souřadnic, která se bude od kartézské soustavy lišit a bude výhodná pro řešení konkrétních úloh. Toto ovšem Lagrangeův formalismus zdůrazňuje. Jisté použití platí i pro Hamiltonův formalismus, především ve spojitosti s vyšetřováním kvantových vlastností spojitých hmotných systémů. Pozoruhodný je příklad z hydrodynamiky, kdy se podařilo dosáhnout určitého úspěchu při popisu pohybu nevazké kapaliny kvantováním kmitavých pohybů (zavedením fononů) a kvantováním rotačních pohybů (zavedením rotonů).

Takové disipační procesy jako difúze a tření jsou při zkoumání spojitých systémů velmi důležité. Jak u diskrétních systémů, tak i zde není lehké zahrnout je do analytického popisu, avšak metody zavedení doplňkových „zrcadlových zobrazení“, krátce popsané v kap. V, může být použito i pro spojitá prostředí, čímž se objevuje mnoho zajímavých možností.*) V tom případě, kdy je nutné přechod na zobecněné souřadnice jen ulehčit, lze použít i Rayleighovy disipační funkce.

Nejdůležitější výsledky použití Lagrangeova a Hamiltonova formalismu spojitých prostředí jsou ve studiu idealizovaných systémů, známých jako *pole*. Ještě je zde jedna vlastnost, která by měla být uvedena, a to relativistická invariantnost. Ukazuje se ovšem, že teorie zde vyložené lze použít v podstatě beze změn. Této otázce je věnována kap. XI.

*) Objasnění viz v knize Morse a Feshbacha, která je zahrnuta v literatuře.

OBEČNÁ ÚVAHA

Newtonův systém mechaniky je obvykle přijímán jako přiblížení, které je vhodné pouze v tom případě, když rychlosti hmotných bodů systému jsou mnohem menší než rychlost světla. Obecnější popis poskytuje speciální teorie relativity. Vynasnažíme se nyní ukázat, jak mohou být požadavky relativity uzpůsobeny k Lagrangeově a Hamiltonově popisu. Jelikož jsou základy speciální teorie vyloženy ve dvou jiných spisech této série, *) bude zde podán jen krátký popis.

Postuláty speciální teorie relativity požadují, aby zákony přírody měly stejnou formu ve všech odečítacích soustavách při jejich rovnoměrném vzájemném pohybu. Tento požadavek je v Newtonově schématu splněn jen u čistě mechanických systémů; zahrnou-li se ale do úvah elektromagnetické jevy, jsou nevyhnutelné některé změny

V důsledku tohoto principu relativity neexistuje jediné měřítko pro čas, které by bylo pro všechny odečítací soustavy stejné. Nějaký bod v obvyčejném prostoru a v určitém čase lze považovat za *událost*, která může být přesně určena souřadnicemi x_1, x_2, x_3 a t . Táž událost v jiné odečítací soustavě je určena souřadnicemi x'_1, x'_2, x'_3 a t' . Jestliže se druhá soustava S' pohybuje vzhledem k první soustavě S konstantní rychlostí V , bude spojení mezi oběma odečítacími soustavami dáno lineární transformací

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, & x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= \frac{x_3 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

kde $\beta = V/c$ a c je rychlost světla.

Předpokládá se, že počátky souřadných soustav jsou na začátku totožné, že jejich prostorové osy mají stejnou orientaci a že se relativní pohyb děje ve směru osy x_3 . Rovnice (10.1) jsou známé jako *Lorenzovy transformační vztahy*.

Mnohem elegantnější způsob popisu, zavedený Minkowskim, určuje událost čtyřmi souřadnicemi $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$. Čtyři veličiny x_μ tvoří složky čtyřdimenzionálního kartézského tenzoru prvního řádu nebo čtyřvektoru. Řeckými písmeny budou označeny indexy, které mohou nabývat hodnot 1, 2, 3, 4. Indexy označené latinskými písmeny budou platné pro hodnoty 1, 2, 3. Lorentzovy transformační vztahy představují ortogonální (tj. délky zachovávající)

*) Viz spisy Dingla a McCrea zahrnuté v přehledu literatury.

transformaci takovýchto složek. Z toho plyne, že

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x'_{\mu}{}^2. \quad (10.2)$$

Interval nebo *vlastní čas* mezi dvěma událostmi x a y je definován jako

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\sum_{\mu} (x_{\mu} - y_{\mu})^2}. \quad (10.3)$$

τ je invariantní veličina nebo skalár, neboť představuje délku čtyřvektoru. Pohyb hmotného bodu může být uvažován jako nepřetržitá posloupnost událostí vytvářející ve čtyřrozměrném Minkowského prostoru nějakou křivku. Invariantní nekonečně malý interval mezi sousedními událostmi na této křivce je

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\sum_{\mu} (dx_{\mu})^2} = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_i \dot{x}_i^2} = dt \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (10.4)$$

kde $\beta c = \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2} = v$ je obyčejná rychlost hmotného bodu.

Na rozdíl od Newtonovy mechaniky hodnoty $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ nejsou již více složkami vektoru. Je to proto, že samotné t je v podstatě složkou vektoru a ne skalárem. (Ve skutečnosti $\dot{x}_i$ jsou tři ze šestnácti složek tenzoru druhého řádu.) Právý čtyřvektor může být definován jako

$$u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}. \quad (10.5)$$

Jelikož

$$\frac{dx_{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dx_{\mu}}{dt},$$

je jasné, že prostorové složky tohoto čtyřvektoru se shodují se složkami obyčejné rychlosti v nerelativistickém limitním případě, kdy $\beta \rightarrow 0$. Vektor je volen tak proto, aby opravňoval pojetí u_{μ} jako skutečné zobecnění vektoru rychlosti. Časová složka je

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.6)$$

a invariantní délka čtyřvektoru je

$$\sum_{\mu} u_{\mu}^2 = -c^2 \quad (10.7)$$

Podle předpokladu je každý hmotný bod spojen s určitou invariantní veličinou m , nazvanou jeho hmotností. Je-li tomu tak, je správné pokládat veličinu

$$p_{\mu} = m u_{\mu} \quad (10.8)$$

za složku čtyřvektoru, na který lze pohlížet jako na zobecnění obyčejného vektoru hybnosti. To je potvrzováno důkazy, které jsou založeny na předpokladu, že zákony zachování hmoty a hybnosti v nerelativistické mechanice jsou zvláštním případem obecných zákonů zachování. Ve velmi obecné podobě tyto zákony ustanovují, že všechny čtyři složky zobecněné hybnosti se zachovávají. Tři prostorové složky odpovídají složkám obyčejné hybnosti, časovou složku

$$p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.9)$$

lze ztotožnit, jak bude zřejmé později, s energií.

NEWTONOVY ZÁKONY

Použití tenzorových označení by mělo především zjednodušit přechod od jedné soustavy souřadnic ke druhé. V jakékoliv odečítací soustavě nemá smysl zcela opustit dosavadní obvyklá označení pro dosažení souhlasu s pozorovanými fakty. Zvláště pak nemá smysl opustit Newtonovy zákony jako základnu dynamických vlastností hmotných bodů. V souvislosti s teorií relativity nebyla dosud řeč o silách, ale nyní budeme předpokládat, že je lze *definovat* jako

$$\textit{síla} = \textit{časová derivace hybnosti}; \quad (10.10)$$

použijeme-li obecnější definice (10.8), je

$$F_\mu = \frac{d}{dt}(p_\mu) = \frac{d}{dt}(mu_\mu). \quad (10.10')$$

Jako i v případě veličin $\dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}$ není tato nová veličina pravým čtyřvektorem. Máme čtyři veličiny F_μ , především však budou prozkoumány tři prostorové složky, dané vztahy

$$F_i = \frac{d}{dt}(p_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \quad (10.11)$$

Je zřejmé, že tyto dva výrazy při malých rychlostech přecházejí na skutečné složky nerelativistických sil. Kinetická energie se jako dříve určuje vztahem

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \sum_i F_i \dot{x}_i. \quad (10.12)$$

Rozepíšeme-li tento výraz, máme

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_i u_i \sqrt{1-\beta^2} \frac{d}{dt}(mu_i) = \\ &= \sqrt{1-\beta^2} \left[\sum_\mu u_\mu \frac{d}{dt}(mu_\mu) - u_4 \frac{d}{dt}p_4 \right] = \\ &= \sqrt{1-\beta^2} \frac{d}{dt} \left[\sum_\mu \frac{1}{2} mu_\mu^2 \right] - ic \frac{dp_4}{dt} = -ic \frac{dp_4}{dt}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Z toho plyne, že

$$p_4 = \frac{i}{c}(T + \text{konst}). \quad (10.14)$$

Použijeme-li znovu výrazu (10.9) a postulujeme-li, že kinetická energie hmotného bodu v klidu je nulová, vidíme, že konstanta v posledním výrazu je mc^2 . Z toho vztah (10.14) je

$$p_4 = \frac{i}{c}(T + mc^2) = \frac{iE}{c}, \quad (10.15)$$

kde E je *celková energie*, daná součtem kinetické energie T a *ekvivalentní energie hmoty* mc^2 .

Dostáváme nyní, že

$$-m^2c^2 = \sum_{\mu} p_{\mu}^2 = \sum_i p_i^2 + p_4^2 = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2},$$

tj.

$$(T + mc^2)^2 = E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1 - \beta^2}, \quad (10.16)$$

což je obecný vztah mezi energií a tříhybností.

LAGRANGEOVA FORMULACE

Jestliže mají získané výsledky souhlasit s Lagrangeovou formulací, platnou pro nerelativistické případy, je nutné, aby

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},$$

tj.

$$\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \quad (10.17)$$

Jelikož $c^2\beta^2 = \sum_i \dot{x}_i^2$, integrace dává

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} - V(x_i), \quad (10.18)$$

kde je integrační konstanta ze zřejmých důvodů zapsána jako $V(x_i)$. Odpovídající Lagrangeovy rovnice pak musí být

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \left(= \frac{d}{dt} p_i \right). \quad (10.19)$$

Porovnáním s (10.11) se ukazuje, že toto jsou správné pohybové rovnice, jestliže $F_i = -\partial V / \partial x_i$. Naneštěstí je těžké uskutečnit další srovnání, protože není lehké představit si v této podobě jakékoliv reálné síly. Podobné spojení s parciálními derivacemi by bylo možné uskutečnit pro gravitační síly, ty se však už ve svém popisu vymykají rámci speciální teorie relativity.

Ve zvláštním případě volné částice, na kterou nepůsobí síly, je takové ztotožnění namístě. V tomto případě lze pohyb částice popsat Lagrangeovou funkcí podle (10.18) při $V = 0$. Je také možné rozšířit tento popis na systém volných částic, ale nikoliv na tuhé těleso, protože u tuhého tělesa je působení mezi částicemi okamžité.

Jelikož speciální teorie relativity byla zformulována tak, že zahrnuje elektromagnetické jevy v obecné invariantní podobě, lze rozumně doufat, že také Lagrangeův popis lze tak zobecnit, aby tyto jevy, podobně jako v nerelativistickém případě, byly v něm obsaženy.

Síla působící na částici o náboji e je dána Lorentzovým výrazem:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.16)$$

a již dříve jsme ukázali, že tento vztah může nabývat podoby:

$$F_i = e \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (3.18)$$

Tato vyjádření jsou založena na pozorováních, uskutečněných při malých rychlostech částic, a není tedy jasné, jsou-li použitelná v obecném případě. Platí-li při všech rychlostech, pak relativistické pohybové rovnice hmotného bodu v elektromagnetickém poli jsou:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = e \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (10.20)$$

Další pozorování, provedená na částicích o vysokých energiích, ukazuje shodu mezi jejich skutečným pohybem a výpočty podle (10.20) při $v_i = \dot{x}_i$. Lze tedy usuzovat, že (10.20) jsou správné pohybové rovnice a není těžké podle předešlých úvah dojít k tomu, že lze tyto rovnice odvodit za předpokladu platnosti Hamiltonova principu

$$\delta \int L dt = 0,$$

kde

$$L = -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \sum_i \dot{x}_i A_i \right). \quad (10.21)$$

Rozšíření této metody na systém nabitých částic je obtížné, neboť je nutné uvažovat jejich vzájemné elektromagnetické ovlivňování.

HAMILTONOVA FORMULACE

Použijeme-li definice $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$, kde L je dáno vztahem (10.21), prostorové složky hybnosti nabitě částice v elektromagnetickém poli jsou:

$$p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c} A_i. \quad (10.22)$$

Nelze nic bezprostředně říci o časové složce, protože v Lagrangeově popisu nebyla uvažována. Hamiltonián jest:

$$\begin{aligned} H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L &= \sum_i p_i \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) + mc^2 \sqrt{1-\beta^2} + e \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) = \\ &= e \sqrt{m^2 c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi, \end{aligned} \quad (10.23)$$

nebo

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\varphi. \quad (10.23')$$

Jako i dříve, časová změna zvětšování kinetické energie nabitě částice je dána výrazem

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} p_i = \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (10.24)$$

Je-li opět $T = 0$ při $\dot{x}_i = 0$, je

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (10.24')$$

Z (10.20) a (10.24) dále plyne, že

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i e \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) = e \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (10.25)$$

Zavedením elektromagnetických potenciálů

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

je

$$\frac{dT}{dt} = -e \mathbf{v} \cdot \left(\nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{d}{dt} (e\varphi) + e \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

tj.

$$\frac{d}{dt} (T + e\varphi) = e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

nebo konečně

$$\frac{d}{dt} (mc^2 + T + e\varphi) = e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (10.26)$$

Veličinu $(mc^2 + T + e\varphi) = E$ lze považovat za celkovou energii nabitě částice. Význam členů na pravé straně rovnice (10.26) je ten, že představují zvětšení celkové energie částice působením nábojů a proudů, které způsobují časovou změnu intenzity pole. Při této představě je hamiltonián identický s celkovou energií, jak je to možné vidět porovnáním (10.23') a (10.24'). Avšak poznamenejme, že Lagrangeova funkce nemůže být přirovnána k takovému výrazu, jako je $(T + mc^2 - e\varphi)$, který by podle předpokladu plynul z nerelativistického případu.

Výraz (10.23), poskytující hamiltonián v jeho kanonické podobě, slouží jako výchozí bod Diracovy relativistické kvantové teorie elektronu.

Nyní jsme ukázali, že rovnice, popisující pohyb jedné nabitě částice v elektromagnetickém poli, mohou být odvozeny jak Lagrangeovou, tak Hamiltonovou metodou. Jak už bylo dříve připomenuto, rozšíření těchto metod na systém nabitých částic nebo na případ pohybu vlivem jakýchkoliv druhých činitelů, např. gravitačního pole, není nijak jednoduché.

KOVARIANTNÍ FORMULACE

Použijeme-li tenzorového počtu v mnohem větší míře než doposud, lze zapsat obdržené výrazy v podobě, jež se liší od podoby použité v předcházejících člancích. Výchozím bodem je zde ta okolnost, že skalární veličinu τ (tj. vlastní čas) lze považovat za zobecnění proměnné t , jelikož t je v nerelativistické mechanice rovněž skalár. Zobecněný Hamiltonův princip pak je:

$$\delta \int L d\tau = 0; \quad (10.27)$$

je-li L skalár, bude tento princip stejný ve všech odečítacích soustavách. Takováto forma zápisu se nazývá *kovariantní*.

Není těžké vidět, že při volbě

$$L = \sum_{\mu} \frac{1}{2} m u_{\mu}^2 \quad (10.28)$$

má tato funkce požadovaný tvar a vyhovuje všem podmínkám, kterým musí vyhovovat lagrangián použitý k popisu pohybu volné částice hmotnosti m .

Je nutno si nyní uvědomit, že existují čtyři proměnné x_μ , které mají při takovém přístupu stejnou důležitost, takže jsou oprávněné čtyři pohybové rovnice tvaru:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial x'_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = 0, \quad (10.29)$$

kde $x'_\mu \equiv dx_\mu/d\tau$. Z (10.28) pro tyto rovnice plyne, že

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\mu) = 0; \quad (10.30)$$

tři rovnice, odpovídající obyčejným prostorovým souřadnicím, přecházejí na

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = 0, \quad (10.31)$$

jejichž oprávněnost byla již dříve přijata. Čtvrtá rovnice je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = 0 \quad (10.32)$$

a vyjadřuje neproměnnost celkové energie.

Složky hybnosti budou nyní také čtyři:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial x'_\mu} = mu_\mu. \quad (10.33)$$

Souhlasí opět s dřívějšími výsledky.

Pro jednotnost musí být nyní hamiltonián definován jako

$$H = \sum_\mu p_\mu x'_\mu - L, \quad (10.34)$$

kde součet je přes čtyři, nikoliv přes tři členy. Toto dále dává, že

$$H = \sum_\mu \frac{p_\mu^2}{2m} = -\frac{1}{2}mc^2\sqrt{1-\beta^2}, \quad (10.35)$$

což *není* identické s celkovou energií $\left(E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$. Kanonické rovnice jsou

$$\frac{d}{d\tau}(p_\mu) = -\frac{\partial H}{\partial x_\mu}, \quad \frac{d}{d\tau}(x_\mu) = \frac{\partial H}{\partial p_\mu},$$

což odpovídá platným vztahům.

Bylo by možné se domnívat, jelikož hamiltonián a celková energie nejsou totožné, že vzniknou proti této formulaci oprávněné námitky. Tomu ale nemůže tak být, protože tento zápis plyne ze čtyřsložkové hybnosti při výrazu, odvozeném v této kapitole dříve —

$$p_4 = \frac{iE}{c}. \quad (10.15)$$

Při kovariantní formulaci pohybových rovnic na rozdíl od té, které bylo použito v předešlých člancích, je energie určena derivací lagrangiánu.

Budeme-li zkoumat pohyb částice v elektromagnetickém poli, musíme potenciály $\mathbf{A}$ a φ omezit určitými podmínkami. Při určování těchto veličin vládne jistá libovůle, kterou lze různými způsoby odstranit. Při relativistických úvahách je výhodné volit:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (10.36)$$

Do dřívějších úvah to nebylo nutné zavádět, avšak nyní pomůže tato okolnost definovat nový čtyřvektor. Vztah (10.36) lze nyní přepsat na:

$$\sum_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial(i\varphi)}{\partial x_4} = 0, \quad (10.36')$$

z čehož je možné usoudit, že čtyři veličiny ($A_1, A_2, A_3, A_4 = i\varphi$) jsou složkami čtyřvektoru. Vztah (10.36') určuje, že čtyřdivergence tohoto vektoru je nulová.

Zavedeme-li do úvah tento nový vektor a vrátíme-li se k nekovariantní Lagrangeově funkci pro nabitou částici v elektromagnetickém poli, můžeme předpokládat, že pro daný případ v úvahu připadající kovariantní Lagrangeova funkce může být:

$$L = \sum_{\mu} \left[\frac{1}{2} m u_{\mu}^2 + \frac{e}{c} A_{\mu} u_{\mu} \right]. \quad (10.37)$$

Je to skalární veličina; první požadavek je takto splněn. Odpovídající pohybové rovnice by byly

$$\frac{d}{dt} \left(m u_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu} \right) = \sum_{\nu} \frac{e}{c} u_{\nu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}}; \quad (10.38)$$

to lze redukovat:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (10.39)$$

a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (10.40)$$

Rovnice (10.39) byly už dříve uvedeny jako správné. Rovnice (10.40), odpovídající časové souřadnici x_4 , souhlasí s rovnicí (10.25). Navržená Lagrangeova funkce poskytuje takto správnou soustavu pohybových rovnic.

Složky hybnosti plynoucí z (10.37) jsou:

$$p_{\mu} = m u_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu}. \quad (10.41)$$

První tři z těchto rovnic souhlasí s (10.22), jsou tedy přijatelné, čtvrtá z nich se dříve neobjevila:

$$p_4 = m u_4 + \frac{e}{c} A_4 = \frac{i}{c} \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \varphi \right). \quad (10.42)$$

Výraz v závorce byl dříve ztotožněn s celkovou energií částice [viz diskusi k (10.26)]; z toho v případě volná (???) částice:

$$p_4 = iE/c. \quad (10.43)$$

Hamiltonián jest

$$H \equiv \sum_{\mu} p_{\mu} x'_{\mu} - L = \sum_{\mu} \frac{1}{2m} \left(p_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu} \right)^2 = \sum_{\mu} \frac{1}{2} m u_{\mu}^2 = -\frac{1}{2} m c^2. \quad (10.44)$$

Tento výraz opět neodpovídá celkové energii. Ovšem podle (10.43) tato okolnost nemá velký význam. Kovariantní zápis poskytuje takto výjimečně elegantní formu pro fyzikálně zajímavé veličiny (rovnice pohybu) a hodnoty (hybnost a energie). Jestliže je to oprávněné, Newtonův popis je narušen, jelikož pojem síly nyní mizí. Je ovšem konečně možné určit složky síly, uvažujeme-li znova pohybové rovnice v obyčejných prostoro-časových označeních, ovšem nejsou takové obyčejné tenzorové veličiny, kterým by tyto složky odpovídaly.

Výsledky vyložené v tomto článku metodou Lagrangeovou a Hamiltonovou odpovídají ve své podstatě výsledkům z předcházejících článků. Je nutné ovšem poznamenat, že při takovémto kovariantním zápisu jsou potřebné velmi prosté výchozí výrazy. Lagrangeova funkce podle (10.37) je nejjednodušší skalární vyjádření, kterého je možné dosáhnout; při tom předpokládáme, že dané funkce závisí od takových veličin, jako je x_{μ} , u_{μ} a A_{μ} . Takové nazírání se ukázalo být velmi užitečným při studiu složitějších systémů. V příští kapitole v souvislosti s tím budou studovány základy teorie pole.

Znamenitým výsledkem moderní fyziky je velký počet objevených a identifikovaných *elementárních částic*!elementární. Kromě velmi dobře známých *elektronů*, *protonů* *neutronů* a *fotonů* je znám nyní až nebezpečně velký počet *mesonů* a *hyperonů*. *) Bude nutné uskutečnit velmi velký počet výzkumů, než bude možné klasifikovat i známé už typy částic; nicméně v teoretických úvahách bylo již dosaženo značných pokroků.

Nejpozoruhodnější vlastností všech doposud objevených částic je, že se jednak chovají jako částice v klasickém smyslu, jednak jsou spojeny s některou podobou vlnového pohybu. Historicky byly nejprve zkoumány jako obyčejné hmotné částice; vlnové vlastnosti, popisované kvantovou teorií, byly sledovány mnohem později. Pro fotony byl rozvoj teorie opačný; nejprve byla propracována teorie elektromagnetického pole, přičemž se ukazovalo, že některé vlastnosti elektromagnetických vln lze objasnit zavedením diskrétních objektů, podobných hmotným částicím a nazvaných fotony.

Tato vlnočástečková dualita byla nyní přijata jako obecná vlastnost všech typů elementárních částic. Při rozpracování teoretického popisu se ukázalo nejlepším zkoumat jev nejprve jako vlnový a pak teprve přejít na korpuskulární představu. Vlnový popis ale vyjadřuje rozvoj *teorie pole*. Toto je klasický výraz. Na určitém stupni se sem zavedou pravidla kvantování a tehdy je možné interpretovat některé výsledky za pomoci korpuskulární koncepce.

Teorie pole se rozvíjela jako logické pokračování teorií spojitých hmotných prostředí. V této kapitole bude snaha poskytnout krátký výklad základních rysů těchto teorií. Kvantověmechanická stránka věci bude ovšem mimo naše úvahy, neboť zavedení pravidel kvantování odpovídá způsobu, jenž byl vyložen v kapitole IX.

Nejznámějším příkladem systému zkoumaného typu je elektromagnetické pole. Je možno je popsat buď pomocí intenzit elektrického a magnetického pole, nebo pomocí funkcí, které jsou skalárním a vektorovým potenciálem; v obou případech jsou vyšetřované veličiny spojitě funkce souřadnic a času. Tento způsob popisu je koneckonců založen na pozorování pohybu obyčejných hmotných částic nesoucích elektrický náboj. Koncepce spojitého *pole* se zavádí proto, aby bylo možné vyhnout se pojmu „působení částic na dálku“. Zdroji pole jsou náboje nesené částicemi. Taková představa se zdokonaluje a idealizuje natolik, že existenci pole lze v některé podobě předpokládat i v případě, že náboje nejsou přítomny. Vlastnosti tohoto elektromagnetického lze popsat soustavou diferenciálních vztahů, známých jako Maxwellovy rovnice. Obvykle se o nich bude hovořit jako o rovnicích pole.

Předpokládá se, že podobně jako je elektromagnetické pole přidruženo fotonům, ostatní pole jsou přidružena k jiným typům elementárních částic. Tato pole nejsou vždy tak složitá, jako je pole elektromagnetické; některá jsou opravdu mnohem jednodušší. Základní domněnka je zde taková, že vlnové vlastnosti libovolných částic lze vyjádřit pomocí soustavy

*) Viz např. článek Shapiro, A. M.: Rev. Mod. Phys. 28, 164 (1956).

rovnice pole obsahujících jednu nebo více polních proměnných. Předpokládá se dále, že tyto rovnice jsou invariantní k Lorentzově transformaci,*) takže vyhovují relativistickým požadavkům, aby totiž všechny základní přírodní zákony měly ve všech odečítacích systémech stejnou podobu. Tomu již vyhovují Maxwellovy rovnice, ačkoliv rozvití teorie elektromagnetického pole předcházelo vzniku speciální teorie relativity.

Polní proměnné jsou přímému pozorování nepřístupné, jejich hodnoty lze však dedukovat z pozorování hmotných systémů, jak je tomu u elektromagnetického pole. Tato okolnost dovoluje obejít otázku o podstatě těchto proměnných. Jsou tak reálné jako vektory intenzit elektrického nebo magnetického pole nebo potenciály v klasické mechanice. Nejlepší je zkoumat je jako matematické objekty, jejichž význam spočívá v možnosti jejich použití k popisu a k předpovědím pozorování přístupných změn ve vlastnostech hmotných systémů.

Teorie pole popisující relativistické vlnové vlastnosti obyčejné hmoty používá takových relativně obtížných pojmů jako jsou *spinory*. Jakákoliv úvaha o spinorových polích by nás přivedla za rámec této knihy a pro ilustraci našich úvah stačí použít značně prostších systémů. Nehledě na nebezpečí nereálnosti je lepší zkoumat elementární, někdy dokonce hypotetické příklady, které jednoduchým způsobem vyjadřují zkoumané principy, než chtít uskutečnit značně složitou analýzu, ve které by se mohly tyto principy rozplynout. Pokusíme se seznámit čtenáře v obecných rysech se základními směry, ve kterých se teorie pole rozvíjí. K podrobnějšímu studiu poslouží čtenáři díla uvedená v přehledu literatury.

LAGRANGEOVA FORMULACE

Tato formulace, vyložená v kap. IX, ačkoliv je načrtnuta speciálně pro spojitě hmotné systémy, je tak vhodným popisem, že by bylo možné ho použít i pro úspěšný popis polí. Podstata polních proměnných se v ní nijak neomezuje, takže to mohou být jak potenciály elektromagnetického pole, tak i posunutí v pružných tělesech nebo rychlostní potenciály při proudění kapaliny. Je skoro nepochybné, že lze nalézt funkce hustoty vyjadřující vlastnosti polí, je však nutné vyjasnit, povedou-li tyto funkce vůbec k nějakému patrnému zjednodušení.

Obecná situace v teorii pole se poněkud liší od téže situace v teorii spojitých hmotných prostředí. Poslední z těchto systémů je jasný už ve svých základních představách, takže analytická metoda se používá pro zjednodušení zápisu pohybových rovnic do tvaru, který je vhodný pro řešení konkrétních úloh. V teorii pole předběžné znalosti o základních vlastnostech obyčejně neexistují a analytické metody se používá jako výchozího bodu teoretického popisu. Uvažování rozličných typů Lagrangeovy hustoty dovoluje doufat v úspěšné objasnění některých pozorovaných jevů. Analytická metoda je empirickou v tomtéž stupni jako metoda, při které se bezprostředně předpokládají formy rovnic pole, ale rozsah možností je značně zúžen.

Bylo nalezeno, že vlastnosti spojitých prostředí lze shrnout do rozšířené formy Hamiltonova principu:

$$\delta \int \int \mathcal{L} dV dt = 0, \quad (9.12)$$

kde v obecném případě $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta^{(r)}, \dot{\eta}^{(r)}, \eta_i^{(r)}, x_i, t)$.

Bylo již řečeno, že teorie pole musí být dostatečně obecné, aby zahrnovaly také postuláty speciální teorie relativity. V souvislosti se studiem pohybu hmotného bodu z analytického hlediska v kap. X bylo shledáno možným zahrnout relativistické zákony dvěma způsoby.

*) V tomto jednodušším výkladu jsou uvažovány pouze vlastní Lorentzovy transformace.

Z nich byl kovariantní způsob nepochybně jednodušší. Je považován za vůdčí princip pro představu dějů v případě polí. Nelze ovšem převzít kovariantní zápis přesně v té podobě, jak byl vyložen v kap. X, avšak opětové vyšetření (9.12) navozuje novou možnost. Jelikož $dV = dx_1 dx_2 dx_3 (\equiv d^3x)$ a $x_4 = ict$, lze tuto rovnici přepsat na

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x \equiv \delta \int \int \int \int \mathcal{L} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0, \quad (11.1)$$

kde byl konstantní faktor ic zahrnut do $\mathcal{L}$. Nekonečně malý součin $d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ představuje element objemu v Minkowského čtyřprostoru a jako takový je invariantní k Lorentzově transformaci. Sám výraz (11.1) je tedy také invariantní za podmínky, že $\mathcal{L}$ je skalární veličinou. Tato podoba Hamiltonova principu je považována za výchozí pro popis polí. Jelikož je pouze přepisem dříve použitého principu, jsou zde použitelné i všechny předešlé důsledky. Zejména pohybové rovnice (v novém zápisu) budou:

$$\sum_{\mu} \frac{d}{dx_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|\mu}^{(r)}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} = 0. \quad (11.2)$$

Tyto rovnice budou nyní nazývány rovnicemi pole. Jejich invariantnost k Lorentzovým transformacím je zabezpečena invariantností Hamiltonova principu v podobě (11.1).

TYPY POLÍ

- a) *Skalární pole.* Nejjednodušší myslitelný typ pole je pole o jedné reálné skalární polní proměnné φ . Omezíme-li derivace φ jen na derivace prvního řádu, pak skalární veličiny, které lze z nich vytvořit, zahrnují celé stupně φ a $\sum_{\mu} (d\varphi/dx_{\mu})^2$.

Jednoduchá Lagrangeova funkce hustoty, založená na těchto veličinách, bude:*)

$$\mathcal{L} = \alpha \left[\sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_{\mu}} \right)^2 + k^2 \varphi^2 \right]. \quad (11.3)$$

Z rovnic (11.2) plyne, že odpovídající rovnice pole by měla vzhled:

$$\sum_{\mu} \frac{d^2 \varphi}{dx_{\mu}^2} - k^2 \varphi = 0,$$

čili

$$(\square - k^2)\varphi = 0, \quad (11.4)$$

kde $\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2}$ je d'Alembertův operátor.

Vyjdeme-li z obecných základů kvantové teorie, lze dokázat, že takové pole popisuje vlnové vlastnosti netrálních částic, majících klidovou hmotnost $m = \hbar/2\pi c$. Experiment ukazuje, že takové částice existují a nazývají se π -mezony.

Byly vyšetřovány také jiné možné typy skalárních polí. Lze např. ukázat, že komplexní skalární polní proměnná $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ je přidružená k elektricky nabitým částicím.

*) Viz poznámku pod čarou na str. (???), kde je vyložena použitá symbolika derivování.

b) *Vektorová pole.* Složitější typ pole by měl mít za polné proměnné složky čtyřvektoru. Elektromagnetické pole je ve skutečnosti příkladem takového pole.

Elektromagnetické pole bez přítomnosti hmot je popsáno Maxwellovými rovnicemi pro volný prostor s nulovými hustotami prostorových nábojů a proudů, tj.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (11.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \quad (11.5b)$$

Definiční vztahy pro funkce vektorového a skalárního potenciálu jsou:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (11.6)$$

Na základě těchto definicí vztahy (11.5a) jsou prostě identity a nebudou dále uvažovány. Takto jsou vlastně rovnicemi pole rovnice (11.5b).

Jak jsme ukázali v kap. X, lze čtyři veličiny $A_1, A_2, A_3, A_4 = i\varphi$ ztotožnit se složkami čtyřvektoru ze vztahu

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

který zmenšuje libovůli v definici (11.6)**) a soustřeďuje pozornost na tzv. Lorentzovu kalibraci. Použijeme-li této kalibrační podmínky, mohou být rovnice (11.5b) přepsány do relativisticky invariantní formy:

$$\sum_{\mu} \frac{d}{dx_{\mu}} \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}} \right) = 0; \quad (11.7)$$

jinak, definujeme-li antisymetrický tenzor druhého řádu $F_{\mu\nu}$ jako

$$F_{\mu\nu} = \frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}}, \quad (11.8)$$

rovnice pole jsou

$$\sum_{\mu} \frac{dF_{\mu\nu}}{dx_{\mu}} = 0. \quad (11.7')$$

Není obtížné vidět, že tyto rovnice lze odvodit z Hamiltonova principu tvaru (11.1), kde

$$\mathcal{L} = \alpha \sum_{\mu} \sum_{\nu} (F_{\mu\nu})^2 = \alpha \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2. \quad (11.9)$$

Je nutné zde upozornit, že ačkoliv tato jednoduchá forma lagrangiánu dává správné rovnice pole, není uspokojující z jiných příčin. Leč její změny jsou nevyhnutelné pouze při opuštění Lagrangeovy metody a nebudou zde uvažovány.

Byly uvažovány i jiné typy vektorových polí. Zvláště jsme ukázali, že, jako ve skalárním případě, vyznačují komplexní složky pole přítomnost elektrického náboje u odpovídajících částic. Další zobecnění, založené na neklasických úvahách, spočívá v předpokladu, že částice

**) Veličiny A_{μ} zůstávají libovolné až na aditivní veličiny $d\Lambda/dx_{\mu}$, kde $\square\Lambda = 0$. To není závažné. Nicméně veličiny $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ musí být plně určeny.

spojené s jakýmkoliv vektorovým polem mají vnitřní moment hybnosti o modulu $h/2\pi$ (jednotkový spin). Toto je rozdíl oproti skalárním polím, jež jsou spojena s částicemi o nulovém spinu.

c) *Spinorová pole*. Vlnové vlastnosti obyčejné hmoty byly také popsány termíny teorie pole. Tento popis zahrnuje speciální veličiny, speciální polní proměnné, známé jako spinory. Nebudeme je dále uvažovat, jen poznamenejme, že odpovídající částice mají poločíselnou hodnotu spinu. To ovšem souhlasí s pozorovacími daty.

V libovolné teorii pole typ polních proměnných vždy určuje hodnotu spinu odpovídajících částic. V libovolném zvláštním případě tato okolnost znovu zužuje oblast možných forem Lagrangeovy funkce hustoty. Jistá pozornost byla věnována polím s částicemi, jejichž spin nebyl ani 0, ani $\frac{1}{2}$, ani 1, nejdůležitější jsou však pole uvažovaná dříve. Při konstruování Lagrangeovy hustoty se obvykle omezujeme na funkce, které obsahují nejrozličnější polní proměnné ne ve vyšším než ve druhém stupni. To souhlasí s obvyklou zkušeností, že rovnice pole jsou diferenciálními rovnicemi nejvýše druhého řádu.

INTERAKCE POLÍ

Do této chvíle byla uvažována toliko jednotlivá „volná“ pole. To už zdůrazňuje část obecnější úlohy, jako je vzájemné působení polí mezi sebou. Tato okolnost je potvrzena Maxwellovými rovnicemi, které v nejobecnější podobě obsahují členy, jež vystihují hustotu proudů a nábojů a v konečném souhrnu popisují interakci mezi elektromagnetickým polem a spinorovým polem spojeným s obyčejnou hmotou. Skutečně bez takových interakcí s polem hmoty by nebylo možné pozorovat jakékoliv další vlastnosti ostatních typů polí.

Aby popis zahrnoval interakci, předpokládejme, že dvě spolupůsobící pole A a B lze popsat pomocí Lagrangeovy funkce hustoty tvaru

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(A)} + \mathcal{L}^{(B)} + \mathcal{L}^{(\text{int})},$$

kde $\mathcal{L}^{(A)}$ a $\mathcal{L}^{(B)}$ se vztahují k izolovaným „volným“ polím, $\mathcal{L}^{(\text{int})}$ zachycuje interakci obou polí. Funkce $\mathcal{L}^{(\text{int})}$ je v obecném případě skalární funkcí obou souborů proměnných. Tento obecný případ lze osvětlit následujícím čistě hypotetickým příkladem:

Nechť A je skalární pole s jednou proměnnou φ a nechť lze jeho vlastnosti vyjádřit Lagrangeovou funkcí hustoty

$$\mathcal{L}^{(A)} = \sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_{\mu}} \right)^2 + k^2 \varphi^2$$

a B nechť je vektorové pole s hustotou

$$\mathcal{L}^{(B)} = \sum_{\nu, \mu} \left(\frac{d\psi_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2.$$

Vlastnosti celého systému lze pak vyjádřit jako

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_{\mu}} \right)^2 + k^2 \varphi^2 + \sum_{\nu, \mu} \left(\frac{d\psi_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2 + \mathcal{L}^{(\text{int})}, \quad (11.10)$$

přičemž $\mathcal{L}^{(\text{int})}$ je skalární funkce φ a ψ_{ν} . Naskýtají se dvě jednoduché možnosti:

$$\mathcal{L}^{(\text{int})} = g \sum_{\mu} \psi_{\mu} \frac{d\varphi}{dt} \quad (11.11a)$$

a

$$\mathcal{L}^{(\text{int})} = g' \varphi \sum_{\mu} (\psi_{\mu})^2, \quad (11.11b)$$

kde g a g' nezávisí na polních proměnných a nazývají se *konstanty spojení*. Říká se pak, že vztah (11.11a) poskytuje gradientní, vztah (11.11b) přímé spojení mezi oběma poli.

Za předpokladu, že platí gradientní spojení podle (11.11a), celkový lagrangián je:

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu} \left(\frac{d\varphi}{dx_{\mu}} \right)^2 + k^2 \varphi^2 + \sum_{\nu, \mu} \left(\frac{d\psi_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2 + g \sum_{\mu} \psi_{\mu} \frac{d\varphi}{dx_{\mu}}. \quad (11.10')$$

Obvyklým způsobem lze obdržet odpovídající pohybové rovnice, tj.

$$2 \sum_{\mu} \frac{d^2 \varphi}{dx_{\mu}^2} - 2k^2 \varphi = -g \sum_{\mu} \frac{d\psi_{\mu}}{dx_{\mu}}, \quad \sum_{\mu} \frac{d^2 \psi_{\nu}}{dx_{\mu}^2} = g \frac{d\varphi}{dx_{\nu}}. \quad (11.12)$$

Takto tedy vliv interakce polí vede k novým členům, které jsou představovány pravými stranami rovnic (11.12) a které dříve ve vlnových rovnicích nebyly.

Opět je třeba zdůraznit, že uvažovaný příklad je čistě hypotetický, slouží však k znázornění obecného případu. V takovémto obecném případě lze přesná řešení nalézt pouze u rovnic vztahujících se k nezávislým polím. Složitější rovnice pro spoupůsobící systémy se obvykle zkoumají pomocí některých metod teorie poruch, při jejichž použití se interakční členy pokládají za malé. Tato metoda je použitelná pro případ interakce mezi elektromagnetickým polem a obyčejnou hmotou, ale u některých známých případů konstanty spojení jsou tak veliké, že uvedené metody nelze použít. Toto pak představuje hlavní problém moderní teoretické fyziky.

Teoretické vyšetřování interakcí mezi elementárními částicemi se převážně soustřeďuje na kontrolu prostších typů lagrangiánů interakce, přičemž se tento přístup ukázal v celku životaschopný. Mezi velmi složité možnosti je třeba zahrnout současnou interakci mezi více jak dvěma poli. V horních úvahách se předpokládalo, že všechny proměnné, které jsou obsaženy v Lagrangeově hustotě spolupůsobení, se vztahují k témuž bodu pole, nebo jinak řečeno, interakce je *lokální*. Úvahy lze také rozšířit a zahrnout velmi obecné typy *nelokálních* interakcí. Všechna taková taková rozšíření musí být ovšem uvažována seriózně, jelikož, nehledě na dosažené teoretické úspěchy, objem dosažených objasnění je ještě neporovnatelně malý. Jednoduché teorie jsou atraktivní, není však logicky podloženo, že všechny jevy lze popsat pomocí jednoduchých lagrangiánů.

INTERAKCE MEZI ELEKTROMAGNETICKÝM POLEM A HMOTOU

Jak už bylo zdůrazněno dříve, úplný popis spinorových polí spojených s hmotou se vymyká rámci této knihy. Pochopitelně je pak neúčelné uvažovat interakci mezi elektromagnetickým a spinorovým polem. Nicméně lze tento případ osvětlit jinou cestou.

Bylo shledáno, že správné rovnice pro „volné“ elektromagnetické pole plynou z Hamiltonova principu tvaru

$$\delta \int \int \int \int \sum_{\mu, \nu} \alpha \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0. \quad (11.13)$$

Rovněž tak forma Hamiltonova principu, poskytující správné relativistické pohybové rovnice nabité částice v elektromagnetickém poli, byla nalezena v kap. X a je:

$$\delta \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \sum_{\mu} \frac{e}{c} \dot{x}_{\mu} A_{\mu} \right) dt = 0. \quad (11.14)$$

Je přijatelné kombinovat oba tyto principy v jeden, který by popisoval vlastnosti takto spojených systémů, tj.

$$\delta \int \left[\frac{1}{ic} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \sum_{\mu} \frac{e}{c} \dot{x}_{\mu} A_{\mu} \right) + \int \alpha \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2 d^3x \right] dx_4 = 0. \quad (11.15)$$

Tento nový princip jistě poskytuje správné pohybové rovnice částice z variací souřadnic této částice. Výsledek variace A_{μ} lze obdržet pouze po takové předběžné přeměně (11.15), kdy jsou všechny členy obsahující A_{μ} zahrnuty pod společné integrační znaménko. Konečně položíme

$$\frac{e}{c} \dot{x}_{\mu} A_{\mu} = \int \frac{e}{c} \dot{x}_{\mu} A_{\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3x, \quad (11.16)$$

kde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \delta(x_1 - x_1^{(0)}) \delta(x_2 - x_2^{(0)}) \delta(x_3 - x_3^{(0)})$, přičemž $\mathbf{r}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ je polohový vektor hmotného bodu a $\delta(x - x_0)$ je Diracova delta-funkce, určená tak, že

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{při} \quad x \neq x_0 \quad \text{a} \quad \int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (11.17)$$

jestliže oblast integrace zahrnuje x_0 .

Dále ztotožníme $e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ s hustotou náboje ϱ (v přesném souhlasu s předcházejícím, ježto je nekonečná při $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ a nulová v ostatních místech); odtud

$$\int \varrho d^3x = \int e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3x = e. \quad (11.18)$$

Položíme nyní $\varrho \dot{x}_{\mu} = j_{\mu}$, kde j_i jsou tři složky normálního vektoru proudu a $j_4 = ic\varrho$. Po takových změnách (11.15) je:

$$\delta \int \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \int \left[\frac{1}{c} \sum_{\mu} j_{\mu} A_{\mu} + ic\alpha \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}} \right)^2 \right] d^3x \right\} dx_4 = 0. \quad (11.15')$$

S veličinami A_{μ} lze nyní uskutečnit variaci:

$$4ic^2\alpha \sum_{\nu} \frac{d}{dx_{\nu}} \left(\frac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}} - \frac{dA_{\nu}}{dx_{\mu}} \right) = j_{\mu}. \quad (11.19)$$

Převédeme-li tyto rovnice do běžné podoby, máme

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= -\frac{1}{4i\alpha c^2} \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\varrho}{4i\alpha c}. \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

Jestliže $\alpha = -1/16\pi ic$, lze tyto rovnice ztotožnit s nejobecnější formulací Maxwellových rovnic, které platí při nenulových hustotách proudů a nábojů.

Jelikož všechny příslušné pohybové rovnice mohou být takto z hybridního Hamiltonova principu (11.15) odvozeny, lze usuzovat, že takto lze reprezentovat všechny spolupůsobící systémy. Jako výsledek nalezení souvislosti mezi odvozenou a přijatou formou rovnic byla určena hodnota konstanty α , která jinak byla libovolná. To plyne z toho, že všechny výrazy byly zapsány jako homogenní funkce a všechny členy integrandu (11.15') odpovídaly energii nebo hustotě energie. Plyne to z faktu, že

$$ic\alpha \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{dA_\mu}{dx_\nu} - \frac{dA_\nu}{dx_\mu} \right)^2 = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad (11.21)$$

kde lze lehko poznat známé výrazy pro hustotu energie elektrického a magnetického pole.

Výraz $\sum_\mu (1/c) j_\mu A_\mu$ lze ztotožnit s interakční Lagrangeovou hustotou v uvažovaném případě. Má tentýž vzhled jako odpovídající člen ve velmi obecném případě, v kterém jde o interakci mezi elektromagnetickým a spinorovým polem.

HAMILTONOVA FORMULACE

Výchozím bodem při výkladu Hamiltonovy metody, jako již v kap. X, je určení sdružené hybnosti

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} = \frac{1}{ic} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|4}^{(r)}}. \quad (11.22)$$

Uvedený název je zde ještě zachován, avšak samy veličiny již ztratily původní význam hybností. Některé těžkosti jsou způsobeny tím, že takto určené veličiny nejsou relativistické, jelikož je od nich speciálním způsobem oddělena časová souřadnice. Možnost obejít tyto těžkosti vysvětlíme v posledním článku. V mnohých případech ji lze zanedbat a v tomto okamžiku se spokojíme s definicí (11.22) a převedeme Hamiltonův formalismus z kap. XI na výrazy se čtyřtenzory.

Hamiltonova funkce hustoty je definována jako

$$\mathcal{H} = \sum_r \dot{\eta}^{(r)} \pi^{(r)} - \mathcal{L} = \sum_r \eta_{|4}^{(r)} - \mathcal{L}. \quad (11.23)$$

Pro kanonické rovnice plyne jako dříve

$$\dot{\pi}^{(r)} = -\frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}}, \quad \dot{\eta}^{(r)} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}}. \quad (9.23')$$

Nemá ovšem smysl převádět tyto rovnice do nových označení vzhledem k jejich skutečně neinvariantní podstatě.

Lagrangeova funkce hustoty, zahrnující vlastnosti zadaného pole, je určena přesně až na aditivní čtyřdivergenci nějaké funkce čtyřvektoru polních proměnných. Nastává to proto, že rovnice pole a integrální funkce jako H , mající určitý fyzikální smysl, se při takovýchto přídavcích nemění.* Na druhé straně tyto přídavky mění funkcionální závislost v hamiltoniánu i v ostatních funkcích hustoty. Získaného stupně volnosti je použito k zajištění symetrie tenzoru napětí–energie–hybnosti, jak se o tom pojednává v následujícím článku.

*) Variace přídavných členů, objevujících se v integrandu Hamiltonova principu, jsou nulové. Takové členy při integraci dávají nulu, jak tomu bylo při pojednání o zákonech zachování v kap. IX.

Energie byla původně definována v souvislosti se studiem obvyklého systému částic; tento termín tedy ztratí svůj význam, nebude-li možné jej znovu k takovýmto systémům vztáhnout. Z toho logicky plyne, že se nelze odvolávat na energii pole, pokud nebude vzata v úvahu interakce mezi zkoumaným polem a polem spojeným s obecnou hmotou. Přesně řečeno jde o ten vztah, který byl nalezen v předešlém článku a v němž byla udána hodnota libovolné konstanty v Lagrangeově funkci hustoty pro elektromagnetické pole.

ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Lze dokázat, že současně s ostatními výsledky zákony zachování hustot z kap. IX jsou použitelné při těchto omezeních i k polím, tj.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \sum_j \frac{dS_j}{dx_j} = 0, \quad (9.25')$$

$$\frac{d\mathcal{G}_j}{dt} - \sum_i \frac{dT_{ij}}{dx_i} = 0. \quad (9.29)$$

Uvažované veličiny mohou být však při určitých sjednocujících vztazích spojeny:

$$T_{\mu\nu} = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|\mu}^{(r)}} \eta_{|\nu}^{(r)} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (11.24)$$

jelikož

$$\left. \begin{aligned} T_{4j} &= ic \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{|j}^{(r)}} \dot{\eta}_{|j}^{(r)} = -ic \mathcal{G}_j, \\ T_{i4} &= \frac{1}{ic} \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \dot{\eta}^{(r)} = \frac{1}{ic} S_i, \\ T_{44} &= \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \dot{\eta}^{(r)} - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \end{aligned} \right\} \quad (11.24')$$

kde jsou složky (ij) totožné s těmi jež měly v kap. IX stejné označení.

Hodnoty $T_{\mu\nu}$ mohou být identifikovány jako čtyřtenzor druhého řádu, který se obvykle nazývá *tenzorem napětí-energie-hybnosti*. Lze snadno poznat, že čtyři zákony zachování je možné nyní vyjádřit jedním obecným výrazem pro čtyřdivergenci

$$\sum_{\mu} \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_{\mu}} = 0. \quad (11.25)$$

Čtyřdivergence nějakého tenzoru druhého řádu je vektor. Vztah (11.25) pak tvrdí, že v tomto zvláštním případě je tento vektor roven nule.

Jelikož $T_{\mu\nu}$ je tenzor, tu čtyři integrály

$$\int T_{4\mu} d^3x \equiv \int \int \int T_{4\mu} dx_1 dx_2 dx_3$$

jsou složkami čtyřvektoru. Z (11.24') plyne, že

$$\left. \begin{aligned} \int T_{4j} d^3x &= -ic \int \mathcal{G}_j d^3x = -ic G_j, \\ \int T_{44} d^3x &= \int \mathcal{H} d^3x = H; \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

tyto veličiny lze ztotožnit se složkami vektoru

$$P_\mu = \left(G_1, G_2, G_3, \frac{iH}{c} \right). \quad (11.27)$$

To odpovídá výsledku pro relativistický hmotný bod a s ním spojeného vektoru, který je nazván čtyřhybností pole. Lze na něj pohlížet jako na celkovou zobecněnou čtyřhybnost hmotných bodů spojených s polem.

Měli bychom poznamenat, že podmínky, stanovené v kap. IX pro neproměnnost veličiny P_μ v čase, jsou ještě použitelné, tj. nezávisle proměnné x_μ nemusí být explicitně obsaženy v $\mathcal{L}$, každý systém je konečný se svými fyzikálními hraničními podmínkami uvnitř oblasti integrace a nebo existují nějaké periodické hraniční podmínky.

Vedle zachování hybnosti lze uvažovat i zachování zobecněného vlnového momentu hybnosti. Můžeme ukázat, že k tomu je zapotřebí, aby tenzor $T_{\mu\nu}$ byl symterický. Je tím zobecněn výsledek z kap. IX a obvykle se má za to, že pole dané podmínce vyhovuje. V mnohých případech sama forma Lagrangeovy funkce hustoty vede na tenzor, který je již symetrický. V jiných případech tomu tak není, ale je ještě možné použít doplňující podmínky, která k prvotnímu tenzoru $T_{\mu\nu}$ přidává ještě druhý tenzor $T'_{\mu\nu}$, vyhovující vztahu

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu} + T'_{\mu\nu} &= T_{\nu\mu} + T'_{\nu\mu}, & \sum_\mu \frac{dT'_{\mu\nu}}{dx_\mu} &= 0, \\ & & \int T'_{4\mu} d^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.28)$$

Tyto podmínky odpovídají libovůli v definici $\mathcal{L}$, jež byla diskutována v předcházejícím článku.

Integrály pohybu lze určit mnohem vhodněji, než jak to bylo provedeno zde, a to zejména systematickou cestou z Hamiltonova principu.

KOVARIANCE

O požadované kovariantní formulaci byla již zmínka dříve a Lagrangeův popis, vyvinutý v této kapitole, byl úmyslně vykládán již tímto způsobem. Nelze to provést u Hamiltonova popisu, který je založen na definici kanonické hybnosti:

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} = \frac{1}{ic} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|4}^{(r)}}. \quad (11.22)$$

Takto definované veličiny nejsou zřejmě lorentzovsky invariantní. Principiálně tím při přechodu ke kvantové teorii vzniká potíže. Jak už bylo ukázáno v souvislosti se spojitým prostředím, kvantová pravidla jsou obvykle zaváděna určením hodnot komutátorů pro operátory zobrazující sdružené proměnné. *) Jestliže se kvantové vlastnosti musí zapsat v relativistických pojmech, musí být tyto komutátory invariantní; v pojmech spojených s předcházejícími definicemi tomu tak není.

Pro odstranění těchto těžkostí je nutné přibrat velmi obecnou definici $\pi^{(r)}$:

$$\pi^{(r)} = \sum_\mu n_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{|\mu}^{(r)}}, \quad (11.29)$$

*) Toto je správné pouze pro pole spojená s částicemi, která se řídí Boseho statistikou (částice s celočíselným spinem). Pro pole vyhovující Fermiho-Diracově statistice (poločíselný spin) se kvantování zavádí určením hodnoty nějakého *antikomutátoru*.

kde n_μ zobrazují libovolné časové směry v Minkovského čtyřprostoru, tj.

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = -1. \quad (11.30)$$

Omezení časových směrů je dáno potřebou šíření poruch pole pouze mezi událostmi rozloženými v čase.

Tento způsob může při svém propracování poskytnout odpovídající kovariantní metodu, zde jsme se ale omezili pouze na předesnění vznikajících těžkostí a možností jejich překonání.

ZÁVĚR

V této kapitole v krátkosti naznačený Lagrangeův a Hamiltonův základ formulace teorie pole může být považován pouze za úvod do problémů. Snažili jsme se zdůraznit obecnost metod analytické mechaniky, které byly vyvinuty jako alternativa Newtonových zákonů pro popis pohybu hmotných bodů. Podrobné rozpracování teorií pole je velmi dlouhý a náročný proces, avšak jejich formulace je poměrně jednoduchá a elegantní věc. Na některé potíže jsme při zjednodušeném výkladu přirozeně neupozornili, ale základní struktura byla dostatečně jasná.

LITERATURA

V tomto souhrnu jsou uvedeny jen vybrané práce. Odkazy na řadu statí speciálního charakteru jsou v poznámkách pod čarou v textu.

a) Práce dávající kritický rozbor základů mechaniky:

- d' Abro, A.:* The Evolution of Scientific Thought. New York, Dover Press 1950
Banach, S.: Mechanics. Polish Mathematical Society. Warsaw, 1951
Bridgman, P. W.: The Logic of Modern Physics. Macmillan, 1927
Dugas, R.: Historie de la Mécanique. Neuchâtel, Editions du Griffon 1950
Lindsay, R. B. and Margenau, H.: Foundations of Physics. New York, Dover Press 1957
Mach, E.: The Science of Mechanics. Illinois, Open Court 1942
Synge, J. L. and Griffith, B. A.: Principles of Mechanics. New York, McGraw-Hill 1942
Yourgrau, W. and Mandelstam, S.: Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory. Pitman, 1955

b) Pojednání zahrnující přibližně stejný okruh otázek jako tato kniha, ale podrobněji a šířeji:

- Corben, H. C. and Stehle, P.:* Classical Mechanics. New York, John Wiley 1950
Goldstein, H.: Classical Mechanics, Addison-Wesley, Camb., Mass., 1950
Lanczos, C.: The Variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press, 1949
Whittaker, E. T.: Analytical Dynamics. New York, Dover Press 1944

c) Rozsáhlejší práce, obsahující velmi zajímavé partie:

- Brillouin, L.:* Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité. Paris, Masson 1949
Joos, G.: Theoretical Physics. Blackie, 1951
Lindsay, R. B.: Concepts and Methods of Theoretical Physics. New York, van Nostrand 1951
Menzel, D. H.: Mathematical Physics. New York, Prentice Hall, 1953
Morse, P. M. and Feshbach, H.: Methods of Theoretical Physics (Vol I). New York, McGraw-Hill 1953
Sommerfeld, A.: Lectures on Theoretical Physics (Vols I, II and III). New York, Academic Press 1950-1952
Tolman, R. C.: The Principles of Statistical Mechanics. O. U. .P., 1950

d) Matematický výklad variačního počtu a jeho aplikací na úrovni vhodné pro další čtení:

- Fox, C.:* An Introduction to the Calculus of Variations. O. U. P., 1950
Kimball, W. S.: Calculus of Variations. Butterworth, 1952

e) Práce věnované cele nebo částečně speciální teorii relativity:

- Bergmann, P. G.:* An Introduction to the Theory of Relativity. New York, Prentice Hall 1942

Dingle, H.: The Special Theory of Relativity. Methuen, 1946
McCrea, W. H.: Relativity Physics. Methuen, 1949
Møller, C.: The Theory of Relativity. O. U. P., 1952

f) Práce o klasické teorii pole:

Kahana, S. and Coish, H. R.: Classical Meson Theory, Am. J. Phys. 24, 225- 39 and 390-9 (1956)
Landanu, L. and Lifschitz, E.: The Classical Theory of Fields. Addison- Wesley, Camb., Mass., 1951
Panofsky, W. K. and Phillips, M.: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley, Camb., Mass., 1955

g) Pojednání o kvantové teorii pole s úvodem zahrnujícím klasické základy:

Corson, E. M.: Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, Blackie, 1953
Gunn, J. C.: Theory of Radiation, Rep. on Prog. in Physics, Vol. 18. London, Phys. Camb., Mass., 1955
Jauch, J. M. and Rohrlich, F.: The Theory of Photons and Electrons. Addison-Wesley, Camb., Mass., 1955
Schweber, S. S.-Bethe, H. A. and de Hoffmann, F.: Mesons and Fields, Vol. 1, New York, Row, Peterson and Co., 1955
Wentzel, G.: Quantum Theory of Fields. New York, Interscience Publishers, 1949